

Глава 13

ОПТИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

В настоящей главе рассматриваются различные компьютерные модели явлений геометрической и волновой оптики [12, с. 316-424], теплового излучения, а также явлений микромира [3; 7, с. 70-106; 10, с. 274-294]. Используемые методы расчета хода световых лучей, интерференционной и дифракционной картины, численного интегрирования и решения дифференциальных уравнений рассмотрены в [2; 5; 6; 8; 11; 14].

13.1. Расчет хода луча света в неоднородной среде

Основная задача геометрической оптики состоит в расчете хода лучей в различных оптических средах с заданным показателем преломления $n(x, y, z)$. При наличии прозрачных тел с сильно отличающимися показателями преломления эта задача может быть решена путем использования законов отражения и преломления [12, с. 332-336]. Компьютер позволяет рассчитать углы преломления и отражения, вычислить угол отклонения луча, построить ход лучей в призме, линзе и т. д. В качестве примера рассмотрим известную задачу о расчете хода световых лучей в капле воды и возникновении радуги [8, с. 59-60].

Задача 1. На шарообразную каплю воды падает параллельный световой пучок. Изучите зависимость угла отклонения световых лучей от прицельного параметра ρ (рис. 13.1.1). Объясните возникновение радуги.

Луч света, падающий на шарообразную каплю (рис. 13.1.1), преломляется в точке A , входит внутрь капли, отражается в точке B и выходит

наружу, преломляясь в точке C . При этом угол $AO'C$ составляет $\varphi = 4\beta - 2\alpha$. В самом деле, в точках A и C луч дважды поворачивается на $(\alpha - \beta)$, а в точке B - на угол $(\pi - 2\beta)$ по часовой стрелке. Общий угол отклонения (поворота) луча составляет $(\pi - \varphi)$.

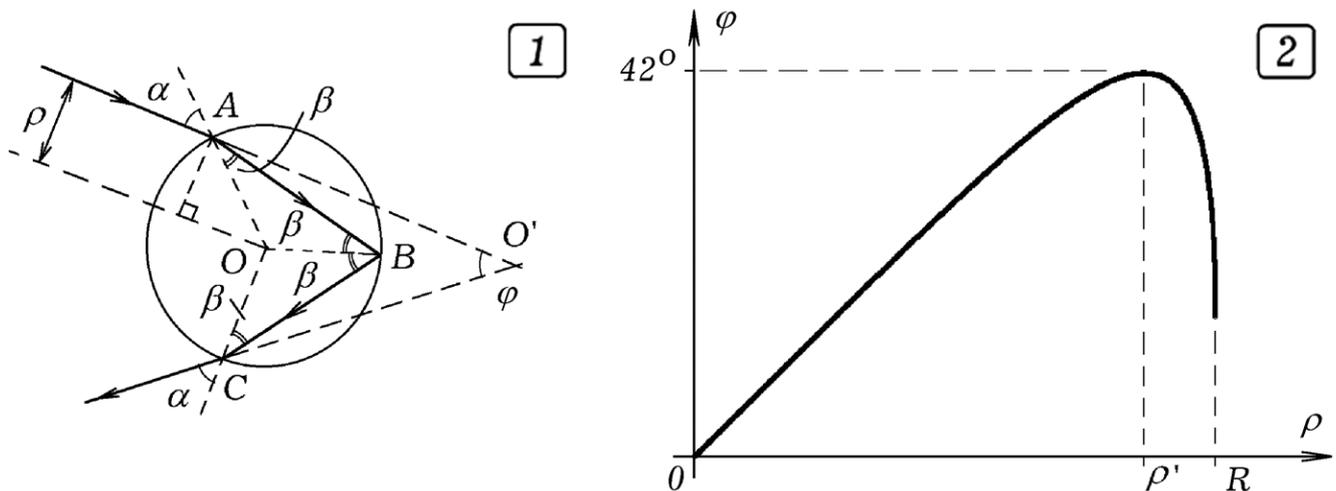


Рис. 13.1. Расчет хода лучей в капле воды. Зависимость $\varphi = \varphi(\rho)$

Чтобы на компьютере построить график зависимости $\varphi = \varphi(\rho)$, необходимо организовать цикл, в котором с заданным шагом изменяется прицельный параметр ρ , вычисляются углы α , β , φ и ставится точка в системе координат φ и ρ . Запишем основные расчетные формулы:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\right), \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta},$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right) = \arctg\left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}\right), \quad \varphi = 4\beta - 2\alpha, \quad n = 1,33.$$

Для решения задачи используется программа ПР-1. Получающийся график представлен на рис. 13.1.2. Видно, что при некотором прицельном параметре ρ' угол φ достигает **экстремального** (максимального) значения $\approx 42^\circ$. Это означает, что именно под этим углом и будут выходить большинство преломленных лучей, которые окажутся параллельными друг другу. Представим множество капель воды, расположенных в верти-

кальной плоскости, на которые падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ . Если встать спиной к источнику света, то можно увидеть светлое кольцо с угловым размером $\approx 42^\circ$. Если источник испускает белый свет, в котором представлены все цвета от красного до фиолетового, то из-за дисперсии наблюдаются разноцветные кольца, образующие радугу. Программа ПР-2 рассчитывает максимальное значение угла φ_m при различных показателях преломления n и строит график $\varphi_m(n)$ (рис. 13.2). При этом учтено, что для видимого света n воды изменяется в интервале от 1,30 до 1,41.

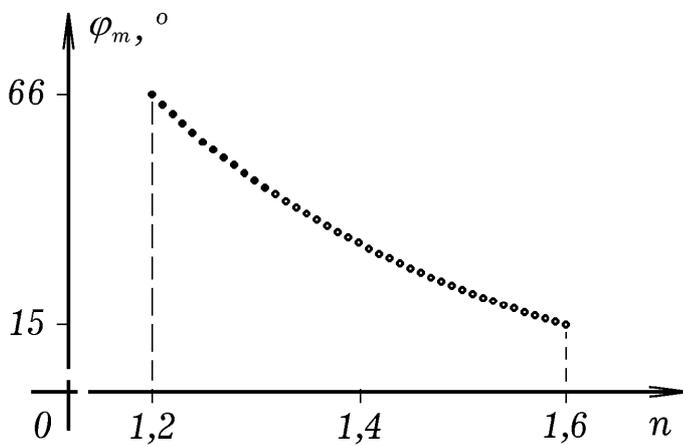


Таблица 1

n	φ	n	φ
1,30	47,1	1,36	38,3
1,31	45,5	1,37	37,0
1,32	44,0	1,38	35,7
1,33	42,5	1,39	34,5
1,34	41,1	1,40	33,2
1,35	39,7	1,41	32,1

Рис. 13.2. Зависимость максимального значения угла φ от n

Рассмотрим распространение светового луча в **плоско-слоистой среде**, показатель преломления которой зависит только от координаты y : $n = n(y)$ (рис. 13.3.1). Разрежем среду плоскостями $y_i = i\Delta y$, где $i = 0, 1, 2, \dots$, а Δy настолько мало, что внутри каждого слоя оптическая плотность среды $n_i = n(y_i)$ постоянна и свет распространяется прямолинейно. Запишем закон преломления для точки $A_i(x_i, y_i)$ [8, с. 94-98]:

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}, \quad n_i \sin \alpha_i = n_{i+1} \sin \alpha_{i+1} = const.$$

Задача 2. Рассчитайте траекторию луча, распространяющегося в среде с показателем преломления $n(y) = a\sqrt{y} + b$. Луч выходит из точки с координатами $A_0(x_0, y_0)$ и составляет угол α_0 с осью Oy .

Так как $n(y_i)\sin\alpha_i = n(y_{i+1})\sin\alpha_{i+1} = const$, то, зная координату y_i и угол α_i , можно вычислить α_{i+1} по формулам:

$$\sin\alpha_{i+1} = \frac{n(y_i)}{n(y_{i+1})}\sin\alpha_i, \quad \cos\alpha_{i+1} = \sqrt{1 - \sin^2\alpha_{i+1}},$$

$$\alpha_{i+1} = \arctg \frac{\sin\alpha_{i+1}}{\cos\alpha_{i+1}} = \arctg \frac{\sin\alpha_{i+1}}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha_{i+1}}}.$$

После этого следует построить точку $A_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ с координатами: $x_{i+1} = x_i + l\sin\alpha_{i+1}$, $y_{i+1} = y_i + l\cos\alpha_{i+1}$, отстоящую от $A_i(x_i, y_i)$ на небольшой шаг l , а затем повторить все снова [8, с. 134-136; 9, с. 61-63].

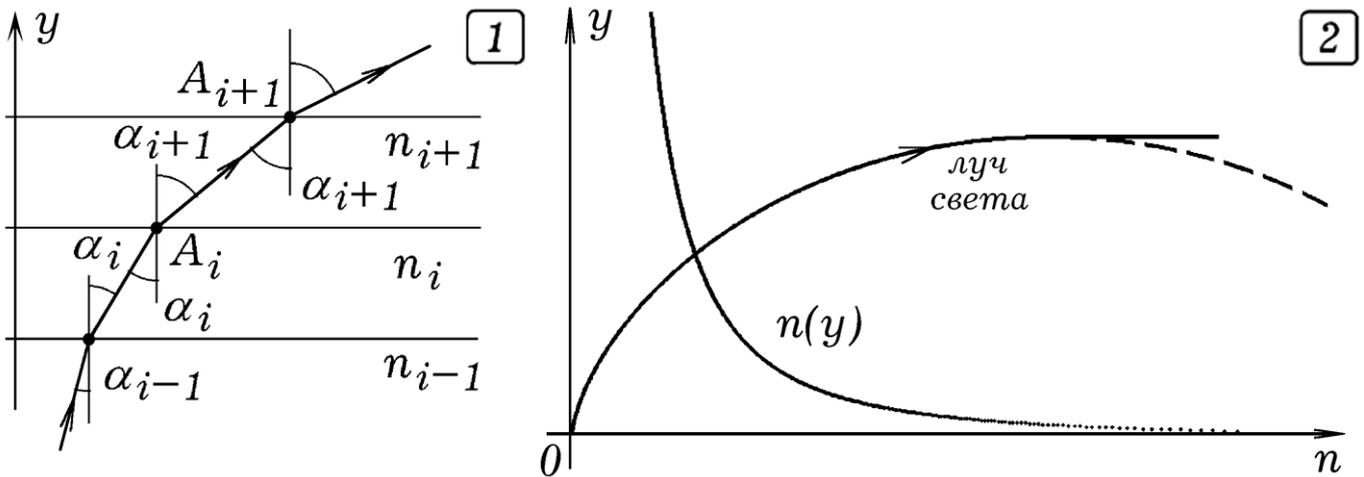


Рис. 13.3. Построение хода луча света в плоско-слоистой среде

Программа ПР-3, строящая луч света в плоско-слоистой среде, содержит цикл, в котором пересчитываются углы α_i и координаты x_i и y_i . Результат ее использования показан на рис. 13.3.2. и 13.4.1. Недостаток этого алгоритма в том, что при $\alpha_i = \pi/2$ программа выдает $\alpha_{i+1} = \pi/2$ (рис. 13.3.2). То есть получается, что луч, направленный параллельно оси Ox , должен распространяться прямолинейно, а на самом деле он искривляется в сторону увеличения показателя преломления [9, с. 61-63].

В общем случае показатель преломления оптической среды сложным образом зависит от двух или трех координат. Эта зависимость может быть плавной, например, как в случае с неоднородно нагретым воздухом, или среда может содержать резко выраженные неоднородности, ограниченные плоскими или изогнутыми поверхностями, на которых будут происходить отражение и преломление света.

Для расчета распространения света в таких средах применяют метод, состоящий в определении положения волновой поверхности в последовательные моменты времени $\tau_i = i\Delta\tau$, $i = 0, 1, 2, \dots$ на основе **принципа Гюйгенса-Френеля**. Пусть известны точка, из которой выходит луч, и его направление. Заменим луч тонким пучком и определим координаты двух точек волновой поверхности. Зная показатель преломления в этих точках среды, можно определить положение волновой поверхности через промежуток $\Delta\tau$ и рассчитать новое направление луча. Затем следует сделать небольшой шаг в этом направлении и повторить все снова.

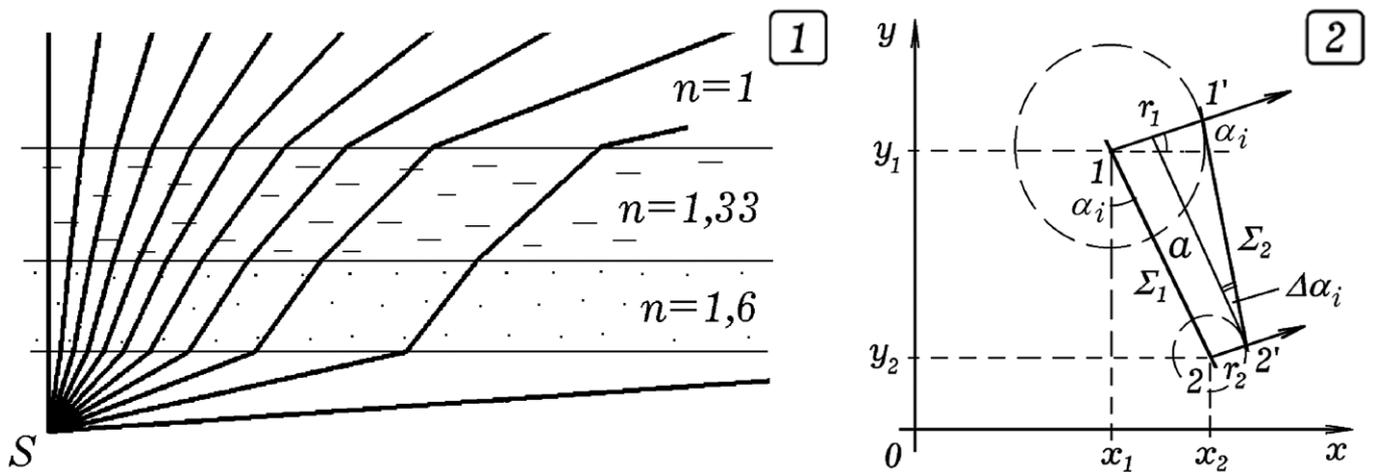


Рис. 13.4. Моделирование распространения света в неоднородной среде

Задача 3. Оптическая среда содержит области, в которых показатель преломления изменяется заданным образом (плавно или резко). Напишите программу, вычисляющую ход произвольного луча света, проходящего через эту среду.

Рассмотрим распространение волны в двумерной среде с показателем преломления $n = n(x, y)$. Пусть в момент τ_1 луч проходит через точку 1 с координатами (x_{1i}, y_{1i}) и образует угол α_i с осью Ox (рис. 13.4.2). Используемая программа ТР-4 находит координаты (x_{2i}, y_{2i}) точки 2 волновой поверхности Σ_1 , отстоящей от точки 1 на малом расстоянии a : $x_{2i} = x_{1i} + a \sin \alpha_i$, $y_{2i} = y_{1i} - a \cos \alpha_i$. Вычислим радиусы вторичных волн $r_{1i} = c\Delta\tau / n(x_{1i}, y_{1i})$, $r_{2i} = c\Delta\tau / n(x_{2i}, y_{2i})$ и определим приращение угла α_i : $\Delta\alpha_i = \text{arctg}((r_{2i} - r_{1i}) / a)$. Это позволяет рассчитать величину угла $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta\alpha_i$ и найти положение точки 1' в следующий момент $\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau$ по формулам $x_{1,i+1} = x_{1i} + r_{1i} \cos \alpha_{i+1}$, $y_{1,i+1} = y_{1i} + r_{1i} \sin \alpha_{i+1}$, а затем определить координату точки 2' волновой поверхности Σ_2 :

$$x_{2,i+1} = x_{1,i+1} + a \sin \alpha_{i+1}, \quad y_{2,i+1} = y_{1,i+1} - a \cos \alpha_{i+1},$$

(2-й вариант: $x_{2,i+1} = x_{2,i} + r_2 \cos \alpha_{i+1}$, $y_{2,i+1} = y_{2,i} + r_2 \sin \alpha_{i+1}$).

После этого все повторяется снова много раз.

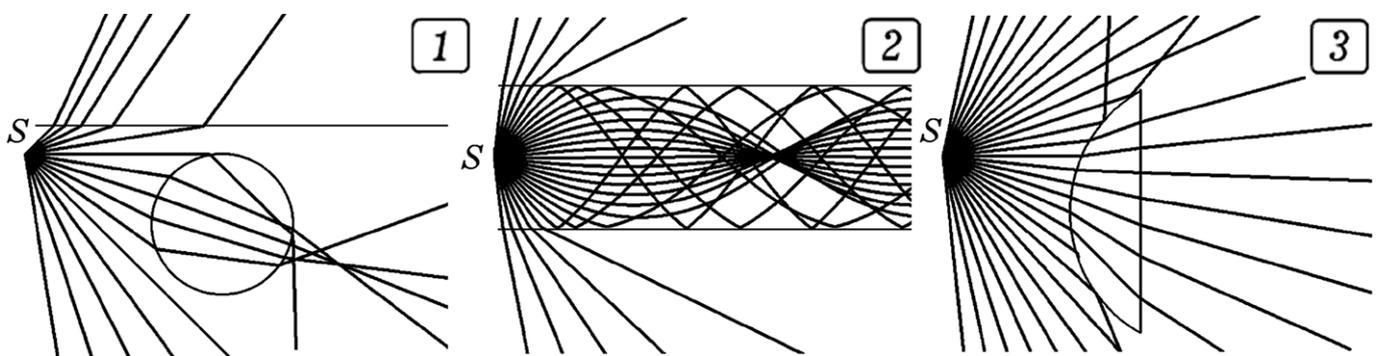


Рис. 13.5. Расчет хода лучей на основе принципа Гюйгенса-Френеля

На рис. 13.5 представлены результаты расчета распространения световых лучей в следующих ситуациях: 1) при наличии плоской и цилиндрической преломляющей поверхности (рис. 13.5.1); 2) в световоде, показатель преломления которого при удалении от оси плавно увеличивается (рис. 13.5.2); 3) при наличии цилиндрической плосковыпуклой линзы,

показатель преломления которой меньше показателя преломления среды (рис. 13.5.3).

13.2. Моделирование интерференции волн

Рассмотрим интерференцию двух гармонических волн, излучаемых когерентными источниками. Интенсивность волны в точке наблюдения зависит от разности хода Δx : $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta x - \alpha)$, где $k = 2\pi / \lambda$ - волновое число, α - разность фаз источников. Возникает постоянное по времени перераспределение энергии в пространстве, при котором интенсивность I в точке наблюдения не равна сумме интенсивностей I_1 и I_2 . В некоторых точках наблюдается максимум или минимум, а в остальных - промежуточное значение интенсивности. Это справедливо для волн любой природы: звуковых, световых и т. д.

Задача 4. Два когерентных источника звука S_1 и S_2 колеблются с частотой ν и сдвигом фаз α . Найдите смещение точек среды, лежащих на одной плоскости с источниками в некоторый момент времени τ . Рассчитайте распределение интенсивности в этой плоскости.

Выберем систему координат так, что координаты источников (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Тогда до произвольной точки $B(x, y)$ волны от источников проходят расстояния $l_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$, $l_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$. Результирующее смещение в момент τ находится по формуле:

$$\xi(x, y) = A_1 \sin(-kl_1 + \omega\tau + \alpha) + A_2 \sin(-kl_2 + \omega\tau),$$

где $A_1 = A/l_1$, $A_2 = A/l_2$ - амплитуды колебаний в точке наблюдения, которые уменьшаются обратно пропорционально l . Используется программа ПР-5, результаты расчетов для $\tau = T$ представлены на рис. 13.6. Если создать цикл по τ , то картина будет изменяться с течением времени.

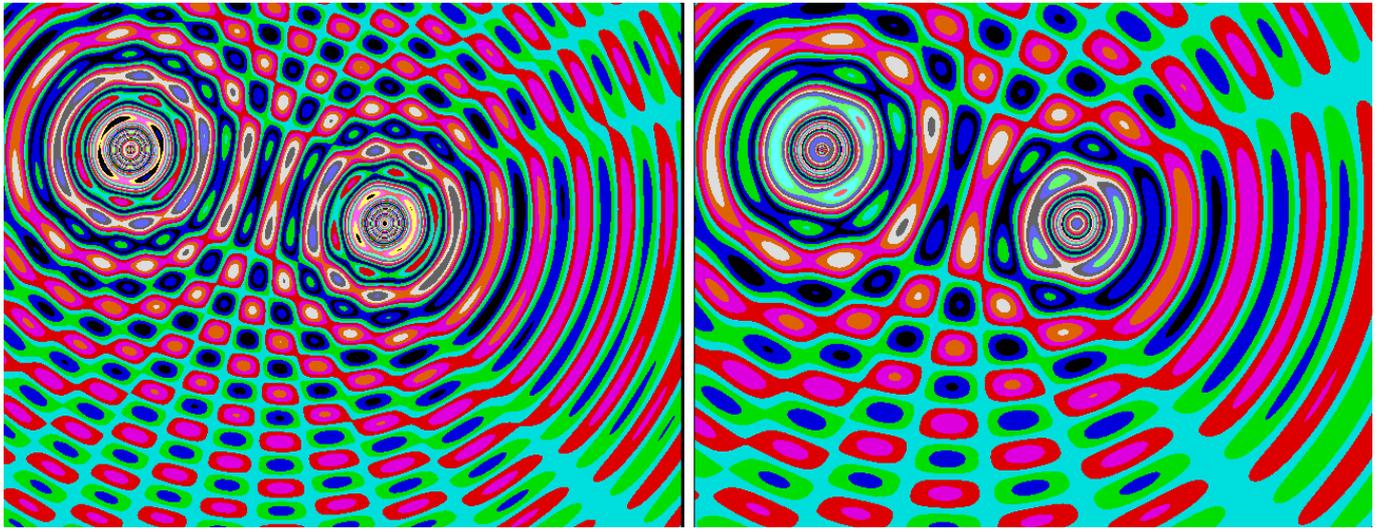


Рис. 13.6. Смещение точек среды при интерференции от двух источников

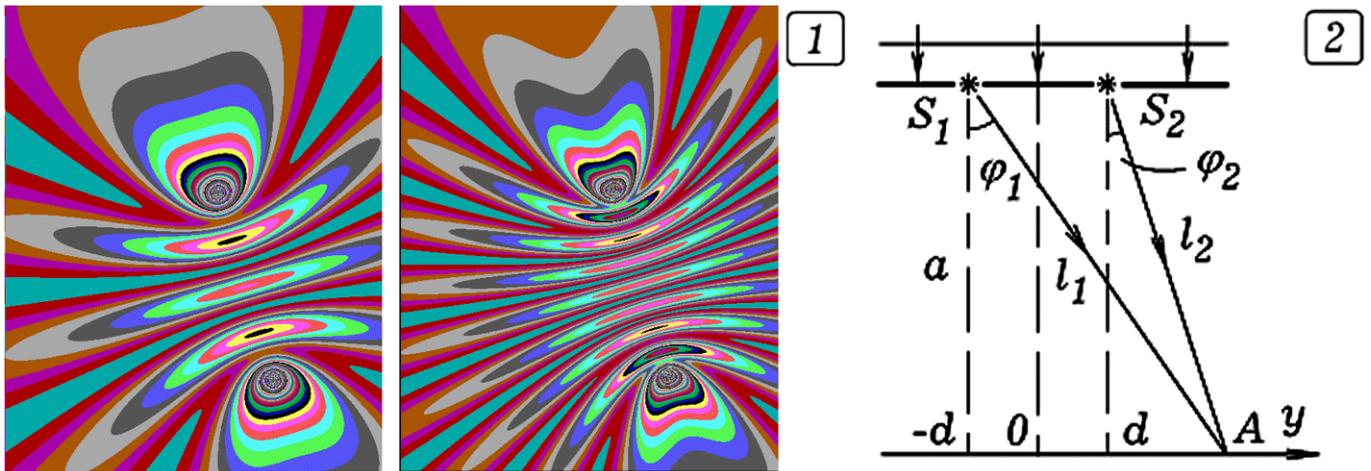


Рис. 13.7. Расчет интерференционной картины от двух источников

Интенсивность в точке наблюдения $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi\Delta l / \lambda)$, где $I_1 = I_0 / l_1^2$, $I_2 = I_0 / l_2^2$ - интенсивности обеих волн. Результат моделирования представлен на рис. 13.7.1. Видно, что при достаточно большой длине волны λ получаются только максимумы с $k = -1, 0, 1$ (k - номер порядка), а при небольшой - максимумы с $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Задача 5. На двойную щель нормально падает плоская световая волна длиной λ . Рассчитайте интерференционную картину, возникающую на экране, отстоящем от щели на расстоянии a (рис. 13.7.2).

Вторичные волны, излучаемые источниками S_1 и S_2 , до точки $A(y)$ проходят расстояния $l_1 = \sqrt{a^2 + (y-d)^2}$, $l_2 = \sqrt{a^2 + (y+d)^2}$. Между ними возникает разность фаз $\Delta\alpha = 2\pi |l_2 - l_1| / \lambda$. Результирующая интенсивность в точке $A(y)$: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\alpha)$. Следует учесть, что интенсивность сферической волны обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника. Результаты моделирования интерференции при различных λ представлены на рис. 13.8. Видно, что чем меньше λ , тем ближе расположены интерференционные максимумы и минимумы.

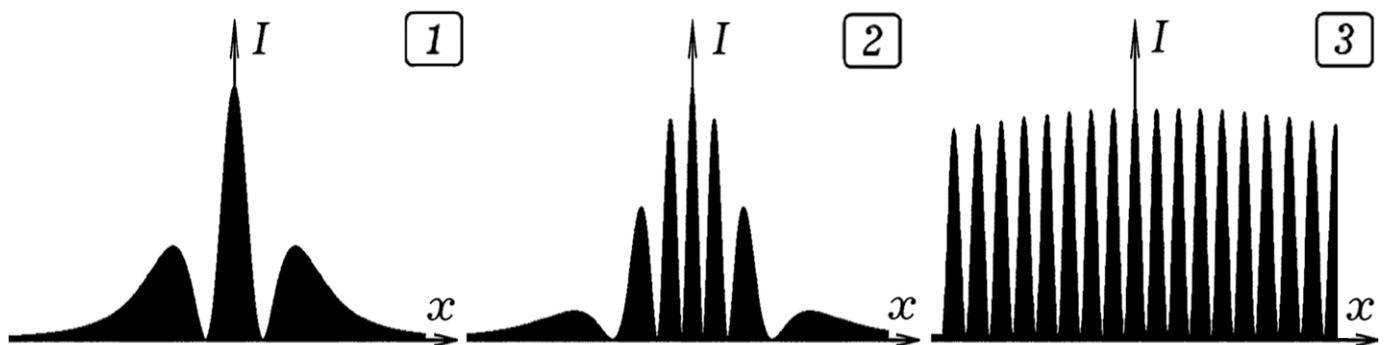


Рис. 13.8. Интерференционная картина на экране при различных λ

Задача 6. Два источника с частотой f одновременно излучают цуги волн длительностью $\Delta\tau$ равной амплитуды A и частоты $\nu \gg f$. Необходимо рассчитать интенсивность в точке наблюдения при различных разностях хода Δl и изучить зависимость результата интерференции от длины когерентности $L = \nu\Delta\tau$ ($\Delta\tau$ - время когерентности) [9, с. 71].

Придя в точку наблюдения, волны создают колебания ξ_1 и ξ_2 , имеющие различные фазы. Результирующее колебание находится в соответствии с **принципом суперпозиции**: $\xi(\tau) = \xi_1 + \xi_2$. Средняя интенсивность в точке наблюдения пропорциональна интегралу от $\xi^2(\tau)$ за время, много большее периода испускания цугов, отнесенное к этому времени:

$$I = \frac{k}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\xi_1 + \xi_2)^2 d\tau.$$

Итак, необходимо сложить ξ_1 и ξ_2 , соответствующие заданной разности хода Δl , возвести в квадрат и проинтегрировать (рис. 13.9.1), после чего поставить точку на графике $I = I(\Delta l)$. Затем изменить разность хода Δl на некоторую величину, повторить все снова и т. д. Получающиеся графики зависимости $I = I(\Delta l)$ для цугов длиной $L = 3\lambda$ и 4λ изображены на рис. 13.9.2 и 13.9.3. Если разность хода Δl равна 0, то цуги достигают точки наблюдения одновременно и в фазе, поэтому усиливают друг друга, получается максимум интенсивности. Когда разность хода $\Delta l = \pm\lambda/2$, цуги практически полностью гасят друг друга, наблюдается минимум. Нескомпенсированными остаются только две крайние полуволны, поэтому результирующая интенсивность близка, но не равна нулю. При разности хода $\Delta l = \pm\lambda$ перекрывающиеся части цугов усиливают друг друга и наблюдается максимум. Так как цуги приходят в точку наблюдения не одновременно, то они перекрываются не полностью, поэтому результирующая интенсивность меньше, чем в центральном максимуме.

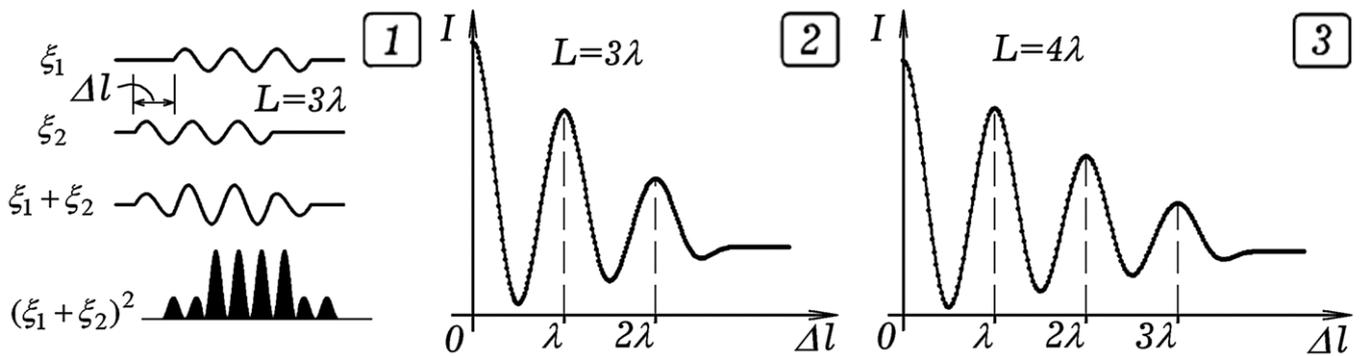


Рис. 13.9. Расчет интенсивности при интерференции цугов

Если разность хода Δl превышает длину когерентности L , цуги проходят точку наблюдения в неперекрывающиеся интервалы времени, поэтому результирующая интенсивность равна сумме интенсивностей каждой волны по отдельности, интерференция не наблюдается. **Условие временной когерентности** можно сформулировать так: интерференция наблюдается тогда, когда разность хода Δl меньше длины когерентности L .

13.3. Моделирование дифракции волн

Рассмотрим дифракцию на щели, на которую нормально падает плоская волна [12, с. 381-415]. Мысленно разрежем площадь щели на N элементарных полосок шириной dx . Каждая полоска является источником S_i элементарной волны. Результат сложения всех волн в точке наблюдения можно представить с помощью векторной диаграммы, которую удобно построить на комплексной плоскости (рис. 13.10.1). От точки O отложим вектор \vec{a}_1 , длина которого пропорциональна амплитуде, а угол α_1 , образованный с осью действительных чисел, равен фазе колебаний, создаваемых в точке наблюдения источником S_1 . От конца вектора \vec{a}_1 отложим вектор \vec{a}_2 , соответствующий колебаниям, создаваемым в точке наблюдения источником S_2 , и т. д. Из принципа суперпозиции следует, что результирующая амплитуда $\vec{A} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_N$. Ей соответствует комплекс амплитуды $\dot{A} = \dot{a}_1 + \dot{a}_2 + \dots + \dot{a}_N$, ее действительная и мнимая части равны:

$$A_{RE} = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \dots + a_N \cos \alpha_N,$$

$$A_{IM} = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \dots + a_N \sin \alpha_N.$$

Амплитуда результирующих колебаний в точке наблюдения равна $A = \sqrt{A_{RE}^2 + A_{IM}^2}$, интенсивность пропорциональна $A^2 = A_{RE}^2 + A_{IM}^2$.

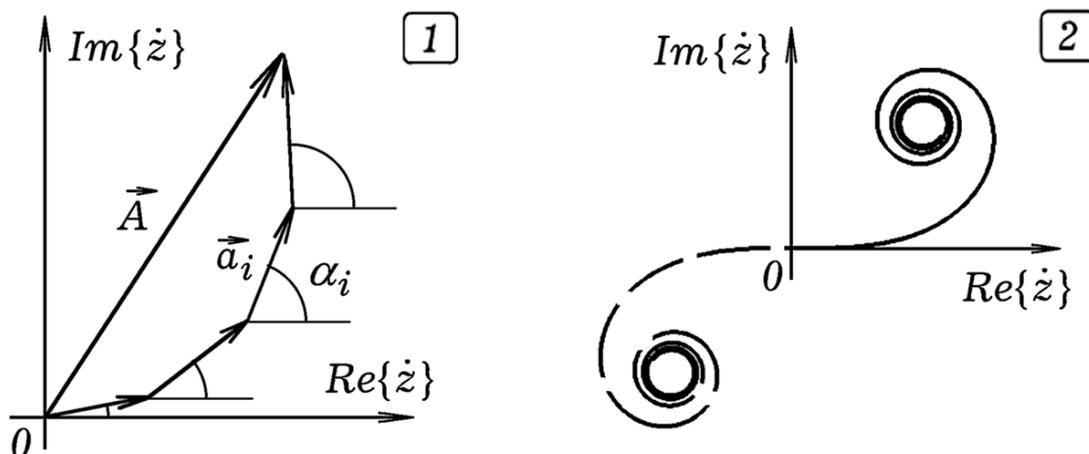


Рис. 13.10. Построение спирали Корню на компьютере

На рис 13.10.2 представлена спираль Корню для точки, расположенной за прямым краем непрозрачной пластины, на который падает плоская волна. Используемая программа содержит цикл, в котором перебираются вторичные источники (элементарные полоски) и на комплексной плоскости последовательно откладываются вектора \vec{a}_i .

Задача 7. Плоская волна нормально падает на пластину с прямым краем. Рассчитайте дифракционную картину, получающуюся на экране, отстоящем от пластины на расстоянии d .

Разобьем волновую поверхность на элементарные полоски шириной dx , параллельные краю пластины. Будем считать, что каждая полоска - элементарный источник волны (рис. 13.11.1). Воспользуемся **методом комплексных амплитуд**: будем последовательно откладывать от точки O вектора \vec{a}_i , соответствующие колебаниям, создаваемым в точке наблюдения каждой полоской по отдельности. Фаза этих колебаний зависит от длины пути $l = \sqrt{d^2 + (y - x)^2}$ и равна $\varphi = 2\pi(l / \lambda)$. Длина каждого вектора \vec{a}_i пропорциональна $\cos \varphi = d / l$ и обратно пропорциональна длине пути l . Колебаниям от i -го элементарного источника соответствует число $\dot{a}_i = (\cos(2\pi \cdot l_i / \lambda) + j \sin(2\pi \cdot l_i / \lambda)) \cos \varphi_i / l_i$, где $j = \sqrt{-1}$. Результирующие колебания в точке наблюдения складываются из элементарных колебаний и изображаются вектором на комплексной плоскости:

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^N (\cos 2\pi(l_i / \lambda) + j \sin 2\pi(l_i / \lambda)) \cos \varphi_i / l_i = A_{RE} + jA_{IM}.$$

Модуль амплитуды равен $A = \sqrt{A_{RE}^2 + A_{IM}^2}$, а интенсивность пропорциональна квадрату модуля амплитуды. Программа ПР-6, рассчитывающая дифракционную картину, должна содержать цикл, в котором перебираются точки экрана с различными координатами y , для каждой отдельно суммируются действительная и мнимая части чисел \dot{a}_i , после чего опре-

деляется модуль амплитуды A и интенсивность $I = bA^2$. Результаты моделирования представлены на рис. 13.11.2.

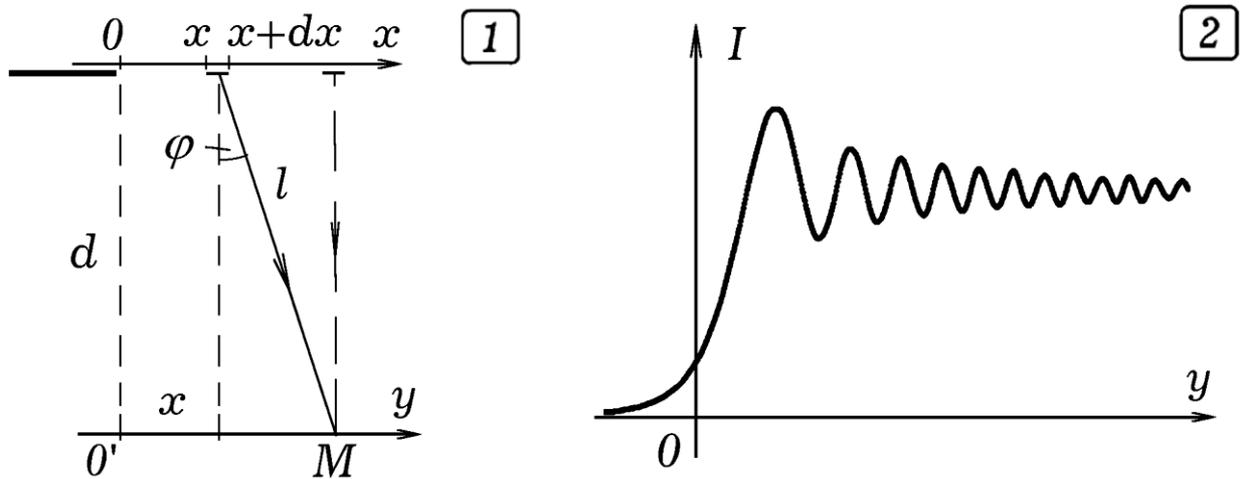


Рис. 13.11. Дифракция волны на прямом краю пластины

Задача 8. Свет с длиной волны λ падает нормально к плоскости щели шириной b , расстояние от щели до экрана равно l . Необходимо рассчитать дифракционную картину, получающуюся на экране.

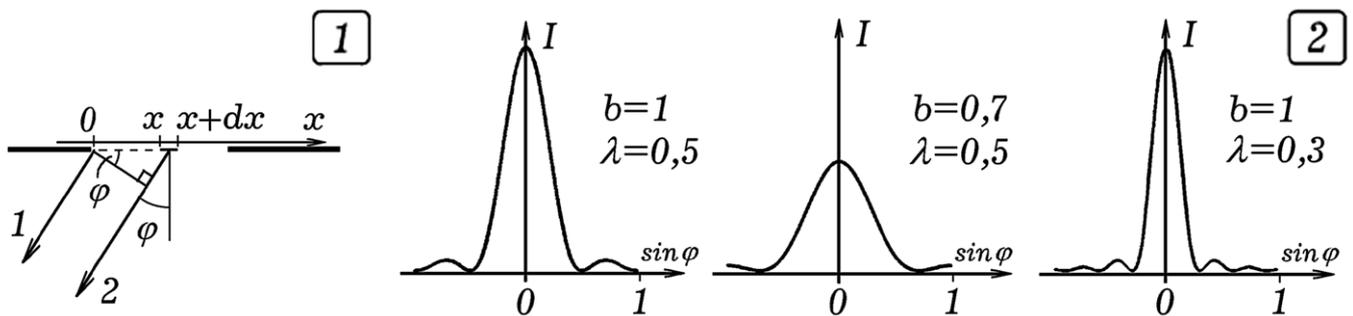


Рис. 13.12. Результаты моделирования дифракции волны на щели

При суммировании колебаний в точках наблюдения следует учитывать ту часть волновой поверхности, которая проходит через щель. Волна 2 отстает по фазе от волны 1 на величину $2\pi x \sin \varphi / \lambda$ (рис. 13.12.1). Используется программа ПР-7, результаты вычислений при различных b и λ представлены на рис. 13.12.2. Из них видно, что чем уже щель и больше длина волны, тем шире центральный максимум дифракционной картины.

Задача 9. Плоская световая волна с длиной λ нормально падает на дифракционную решетку с периодом d . Рассчитайте дифракционную картину, получающуюся на бесконечности, постройте график зависимости интенсивности I от синуса угла отклонения φ .

Заменяем дифракционную решетку системой параллельных светящихся нитей, лежащих в одной плоскости и отстоящих друг от друга на расстоянии d . Все источники излучают когерентные волны с длиной λ . Рассмотрим параллельные лучи, идущие под углом φ к нормали к плоскости нитей (дифракционной решетки). Они пересекаются в бесконечности; если использовать собирающую линзу, то точки их пересечения будут лежать в фокальной плоскости. Разность хода волн, идущих от соседних источников и собирающихся в бесконечности, равна $d \sin \varphi$. Эти волны приходят в точку наблюдения с разностью фаз $2\pi d \sin \varphi / \lambda$ и создают колебания, соответствующие комплексной амплитуде

$$\dot{a}_i = A_0 \left[\cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi_i \right] + j \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi_i \right] \right].$$

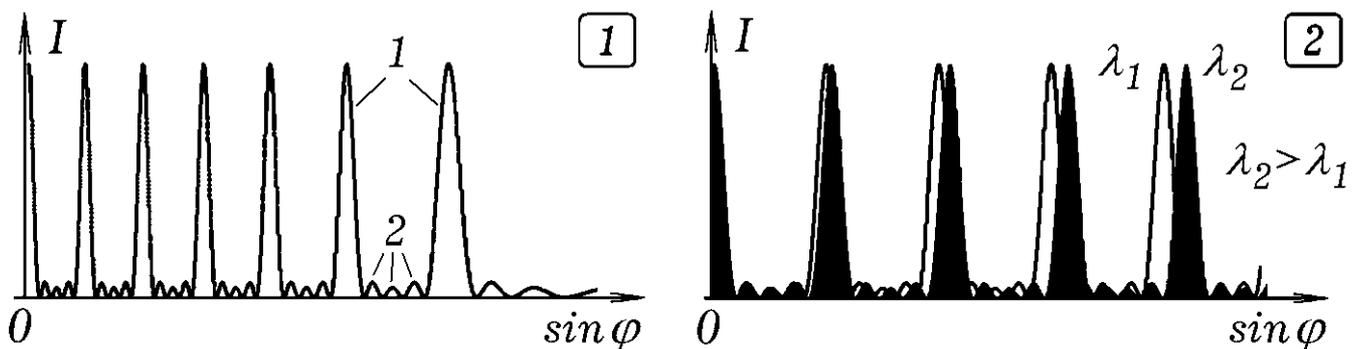


Рис. 13.13. Дифракция света на дифракционной решетке

Чтобы найти результирующие колебания, необходимо просуммировать все комплексные амплитуды: $\dot{A} = \dot{a}_1 + \dot{a}_2 + \dots + \dot{a}_N$. Амплитуда результирующего колебания в точке наблюдения равна: $A = |\dot{A}|$, а интенсивность I пропорциональна A^2 . Для расчета дифракционной картины необ-

ходимо определить интенсивность I для каждого угла φ и построить график зависимости $I = I(\sin \varphi)$.

Проведя серию вычислительных экспериментов, можно убедиться в следующем (рис. 13.13.1 и 13.13.2): 1) чем больше длина волны λ , тем больше расстояние между главными дифракционными максимумами 1; 2) чем больше расстояние между щелями d , тем меньше расстояние между главными дифракционными максимумами; 3) чем больше количество щелей N , тем больше число побочных дифракционных максимумов 2 между соседними главными дифракционными максимумами 1.

Задача 10. На непрозрачную пластину с круглым отверстием радиуса R нормально падает плоская волна. Исследуйте зависимость интенсивности в точке наблюдения M , находящейся на оси отверстия, от расстояния y до экрана.

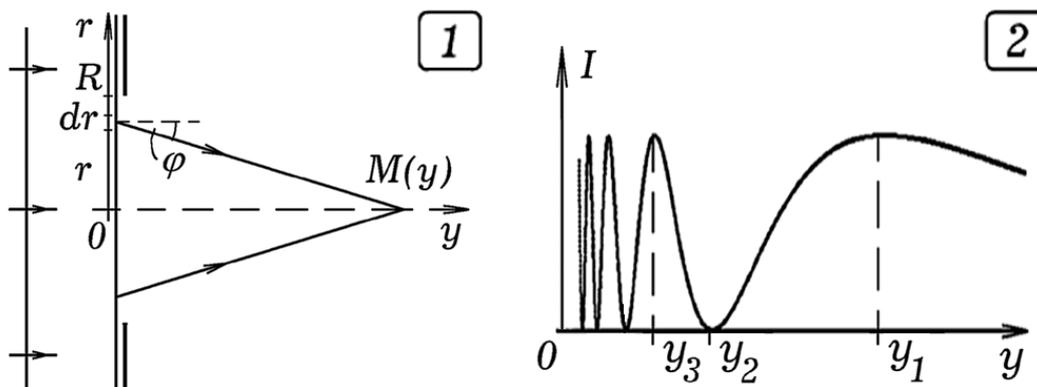


Рис. 13.14. Интенсивность волны на оси отверстия

Плоскую волновую поверхность разрежем на кольца радиусами r и шириной dr (рис. 13.14.1) и при расчете результирующей интенсивности в точке M учтем амплитуды и фазы приходящих в нее вторичных волн. Задача решается методом комплексных амплитуд, получающиеся результаты приведены на рис. 13.14.2. При $y = y_1$ в отверстии укладывается одна зона Френеля, в точке A наблюдается максимум интенсивности; при $y = y_2$ - две зоны Френеля (минимум); при $y = y_3$ - три зоны Френеля, что

опять соответствуют максимуму. Колебания, создаваемые соседними зонами Френеля, компенсируют друг друга, поэтому в дифракционных минимумах интенсивность равна 0, а в максимумах – одинакова.

13.4. Моделирование излучения черного тела

Зависимость спектральной светимости r абсолютно черного тела от частоты ν и температуры T выражается формулой Планка:

$$r(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (\exp(h\nu / kT) - 1)}.$$

От абсолютной температуры T и частоты ν перейдем к параметрам

$$T' = T \frac{k}{h} \cdot \left(\frac{2\pi h}{c^2} \right)^{1/3} \quad \text{и} \quad \nu' = \nu \left(\frac{2\pi h}{c^2} \right)^{1/3}.$$

Тогда формула Планка приобретет вид: $r(\nu', T') = \nu'^3 / (\exp(\nu' / T') - 1)$.

Задача 11. Постройте график зависимости спектральной светимости абсолютно черного тела от частоты для разных температур. Методом численного интегрирования определите интегральную светимость абсолютно черного тела для данной температуры. Подтвердите, что интегральная светимость абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры: $R = \sigma T^4$ (закон Стефана-Больцмана).

Нахождение интегральной светимости черного тела может быть осуществлено методом численного интегрирования. Программа ПР-8 позволяет построить графики $r = r(\nu')$ при различных T' и рассчитать интегральную светимость R по формуле:

$$R = \sum_{i=1}^n r(\nu'_i) \Delta \nu' = \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i'^3 \Delta \nu'}{\exp(\nu'_i / T') - 1}, \quad \nu'_i = i \Delta \nu'.$$

Результаты вычислений представлены в таблице 13.2. Видно, что с ростом T увеличивается R , а величина $\sigma = R/T^4$ остается постоянной.

Таблица 13.2

T	R	λ_m	$\sigma = R/T^4$	$b = \lambda_m T$
100	$649 \cdot 10^6$	0,00355	6,49	0,355
200	$10400 \cdot 10^6$	0,00177	6,50	0,354
300	$52600 \cdot 10^6$	0,00118	6,49	0,354
400	$166000 \cdot 10^6$	0,000885	6,48	0,354
500	$405000 \cdot 10^6$	0,000709	6,48	0,355
600	$841000 \cdot 10^6$	0,00059	6,49	0,354

Задача 12. Определите длину волны, соответствующую максимуму спектральной светимости черного тела, имеющего температуру T . Подтвердите, что длина волны λ_m , приходящаяся на максимум спектральной светимости абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его температуре: $\lambda_m = b/T$ (закон смещения Вина).

Программа ПР-8 позволяет найти длину волны λ_m , соответствующую различным температурам T . Из таблицы 2 видно, что по мере увеличения T длина волны, соответствующая максимуму спектральной светимости, уменьшается так, что величина $b = \lambda_m T$ остается постоянной.

13.5. Движение частицы в потенциальной яме

Динамическое состояние микрочастицы описывается волновой функцией $\Psi(x, y, z, \tau)$, квадрат модуля которой равен плотности вероятности нахождения ее в данной точке пространства. Вероятность нахождения частицы в элементарном объеме dV равна $|\Psi(x, y, z, \tau)|^2 dV$. Основным динамическим уравнением квантовой механики, изучающей явления микромира, является **уравнение Шредингера** [10, с. 274-294]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - U(x, y, z) \right) \Psi = 0.$$

Его решение имеет вид: $\Psi(x, y, z, \tau) = \psi(x, y, z) \exp(-i\omega\tau)$, где $\omega = E/\hbar$, а функция $\psi(x, y, z)$ удовлетворяет стационарному уравнению:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) + (E - U(x, y, z))\psi(x, y, z) = 0.$$

Рассмотрим одномерное движение частицы массой m в поле потенциала $U(x)$. Запишем одномерное уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x))\psi = 0.$$

В конечных разностях оно выглядит так:

$$\frac{\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_i)\psi_i = 0, \quad \psi_{i+1} = \left[2 - \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_i)\Delta x^2 \right] \psi_i - \psi_{i-1}.$$

Если частица находится в потенциальной яме, то значения энергии E_n образуют **дискретный спектр**. Численно решить уравнение Шредингера - значит подобрать такие значения энергии E_n , при которых функция $\psi(x)$ не расходится, то есть всюду сохраняет конечные значения. Только при этом интеграл от квадрата модуля $\Psi(x, \tau)$ будет конечной величиной, как того требует условие нормировки. Для решения этой **задачи на собственные значения** используют метод стрельбы, разностный метод, метод Галлеркина, фазовый метод и другие [4, с. 280-289].

Задача 13. Рассчитайте энергетические уровни частицы, находящейся в одномерной несимметричной прямоугольной потенциальной яме с высотой стенок U_1 и U_2 .

Стационарное уравнение Шредингера - дифференциальное уравнение второго порядка, которое может быть решено методом Эйлера-Кромера [2, с. 283-288]:

$$\psi_i'' = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_i)\psi_i, \quad \psi_i' = \psi_i' + \psi_i'' \Delta x, \quad \psi_i = \psi_i + \psi_i' \Delta x.$$

Задавая энергию частицы E , можно рассчитать функцию $\psi(x)$. Основная трудность состоит в том, что далеко не любое решение уравнения имеет физический смысл. При произвольных значениях E функция $\psi(x)$ стремится к бесконечности, что противоречит **условию нормировки**: интеграл от $|\Psi(x, y, z, \tau)|^2 dV$ по всему пространству должен быть равен 1, так как частица существует и находится где-то внутри потенциальной ямы или рядом с ней. Поэтому физический смысл имеют лишь некоторые дискретные значения энергии E_n , при которых волновая функция за пределами потенциальной ямы стремится к нулю. Необходимо приближенно определить эти разрешенные уровни энергии E_n .

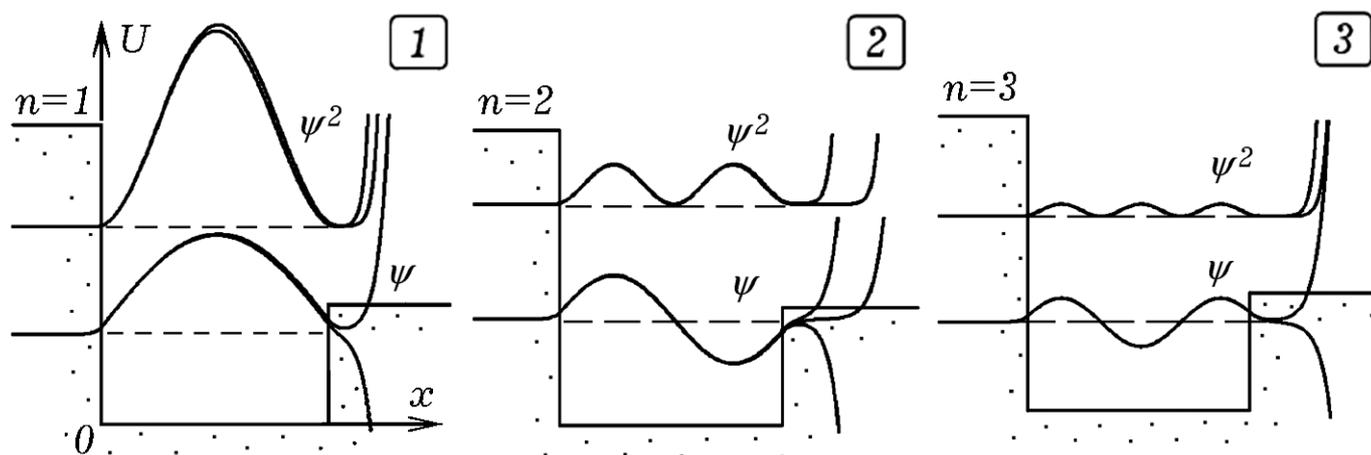


Рис. 13.15. Моделирование частицы в потенциальной яме

Программа ТР-9 решает уравнение Шредингера для частицы в потенциальной яме $U(x)$ и рисует графики зависимостей $\psi(x)$ и $|\psi(x)|^2$. При этом используется **метод стрельбы**: энергия частицы E увеличивается с некоторым шагом ΔE , и каждый раз строится график функции $\psi(x)$, который для произвольных E при $x \rightarrow \infty$ стремится к $+\infty$ либо к $-\infty$. Необходимо определить энергию частицы E_n , при которой функция $\psi(x)$ на бесконечности будет стремиться к 0 (рис. 13.15). Все расчеты носят приближенный характер, точного совпадения с истинным значением энергии в стационарном состоянии не происходит. На рис. 13.15.1, 13.15.2

и 13.15.3 приведены решения для стационарных значений энергии E_1, E_2, E_3 . Незначительные вариации E_n не приводят к существенным изменениям $\psi(x)$ вблизи потенциальной ямы. В программе ТР-9 переменной f_i соответствует $\psi(x)$, а переменным f_{i1} и f_{i2} - первая и вторая производные $\psi(x)$ по координате x . В программе задаются малые, но отличные от нуля значения для ψ и ψ' для точки x_0 , находящейся левее левой стенки потенциальной ямы, и подбираются такие E_n , для которых функции ψ и ψ' при $x \rightarrow +\infty$ стремятся к 0.

Существует другой способ оценки верхней границы энергии E^* квантово-механической системы, находящейся в основном состоянии, основанный на использовании вариационного метода. Для расчета E^* , соответствующей волновой функции $\psi(x)$, используется формула:

$$E^* = \int \psi^* H \psi dx / \int \psi^* \psi dx, \text{ где } H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(r).$$

Вариационный метод состоит в таком подборе $\psi(x)$, при котором энергия системы E^* минимальна. Для произвольной функции $\psi(x)$ значение E^* больше энергии основного состояния E_0 .

Задача 14. Профиль потенциальной ямы задается функцией $U(x)$. Методом Монте-Карло оцените верхнюю границу энергии микрочастицы, находящейся в основном состоянии, и найдите волновую функцию $\psi(x)$.

Для численного решения этой задачи дискретизируют пространственную область, заменяя $\psi(x)$ множеством дискретных значений ψ_i , и применяют метод Монте-Карло. Приближенное значение энергии может быть рассчитано по формуле:

$$E^* \approx \sum_{i=1}^N \psi_i \left[U_i - \frac{\hbar}{2m} \frac{\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1}}{\Delta x^2} \right] \Delta x / \sum_{i=1}^N \psi_i^2 \Delta x.$$

Если частицей является электрон, то $\hbar/m = 1,159 \cdot 10^{-4}$ Дж·с/кг. Будем считать этот коэффициент равным 0,02, а потенциальную энергию измерять в условных единицах. Пусть профиль потенциальной ямы задается так:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10, \quad x \geq 50, \\ -3, & 10 < x \leq 25, \\ -9, & 25 < x < 50. \end{cases}$$

Используемая программа ПР-10 содержит цикл, в котором случайным образом выбирается номер i -го узла одномерной сетки и изменяется значение ψ_i на небольшую случайную величину. После этого снова вычисляется энергия E^* . Если новое значение меньше старого, то изменение ψ_i принимается, а в противном случае отвергается. Получающиеся графики $\psi(x)$ и $|\psi(x)|^2$ представлены на рис. 13.16.1. На рис. 13.16.2 показано, как изменяется значение верхней границы энергии частицы E^* с ростом номера итерации k . Для получения разумных числовых значений необходимо правильно задать профиль потенциальной ямы и применить условие нормировки волновой функции $\psi(x)$.

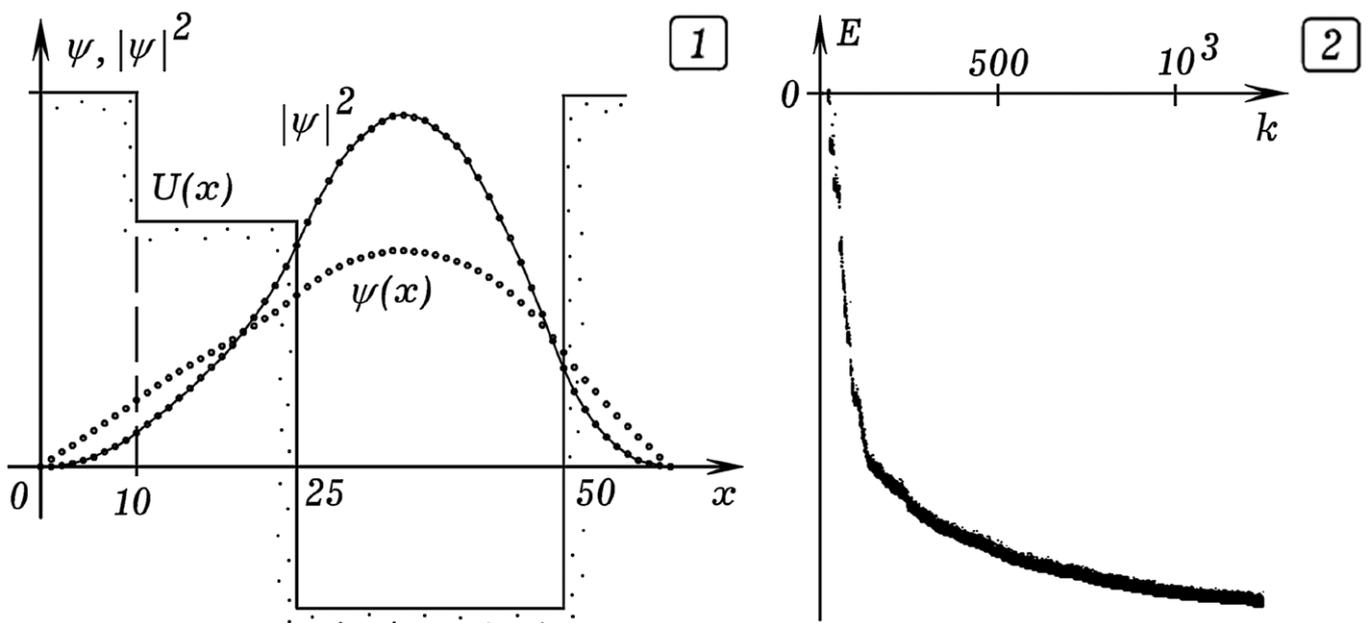


Рис. 13.16. Решение уравнения Шредингера вариационным методом

13.6. Гармонический осциллятор

Рассмотрим микрочастицу, находящуюся в потенциальной яме $U = m\omega_0^2 x^2 / 2 = ax^2$. Такая система называется **одномерным гармоническим осциллятором**. Запишем уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right) \psi = 0.$$

Из теории известно, что стационарным состояниям гармонического осциллятора соответствуют **эквидистантные уровни энергии** $E_n = \hbar\omega_0 (n + 1/2)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

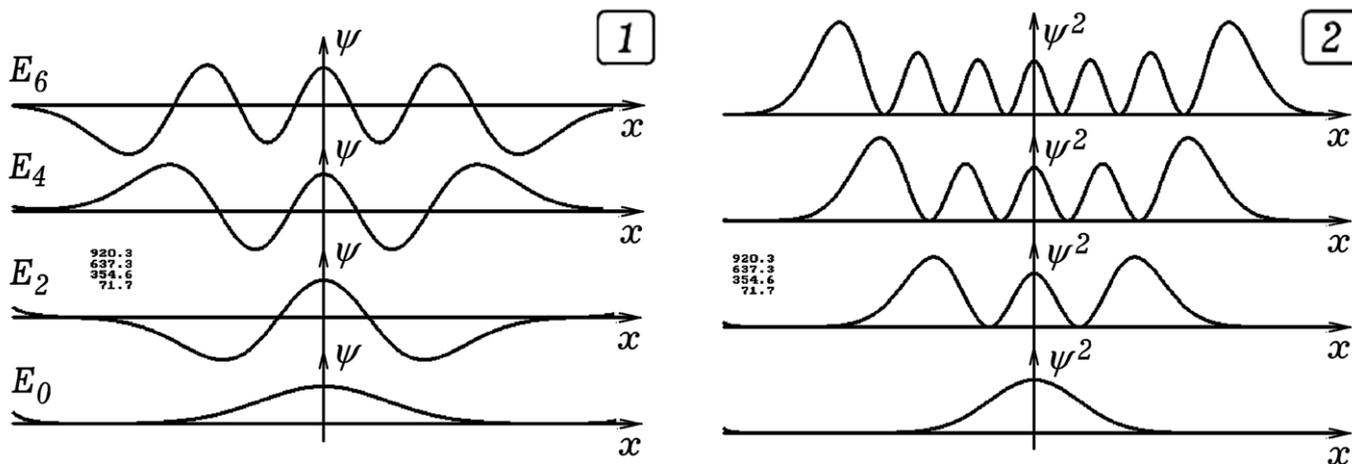


Рис. 13.17. Волновая функция и квадрат ее модуля для четных n

Задача 15. Исследуйте гармонический осциллятор - микрочастицу, находящуюся в потенциальной яме $U = ax^2$. Найдите значения энергии, соответствующие стационарным состояниям.

Эта задача аналогична задаче о частице в прямоугольной потенциальной яме и отличается тем, что потенциальная энергия должна быть задана уравнением $U = ax^2$. Так как потенциальная яма симметрична, то для нахождения разрешенных уровней энергии вычисление волновой функции удобно начинать с точки $x_0 = 0$. При этом используется программа ПР-11. Для определения $\psi_n(x)$ для четных n задают начальные условия

$\psi(0) \neq 0$ и $\psi'(0) = 0$. При этом получается симметричная относительно прямой $x = 0$ функция $\psi_n(x)$, $n = 0, 2, 4, \dots$ (рис. 13.17). Чтобы найти $\psi_n(x)$ для нечетных n , вычисления следует начинать с $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) \neq 0$. Получающиеся волновые функции $\psi_n(x)$, $n = 1, 3, 5, \dots$ обладают центральной симметрией относительно начала координат (рис. 13.18). На рисунках также приведены графики функций $|\psi_n(x)|^2$. Найденные значения энергии (в условных единицах) действительно удовлетворяют формуле $E_n = E_0(n + 1/2)$. Программа не учитывает условие нормировки, поэтому амплитуды волновых функций получаются произвольными.

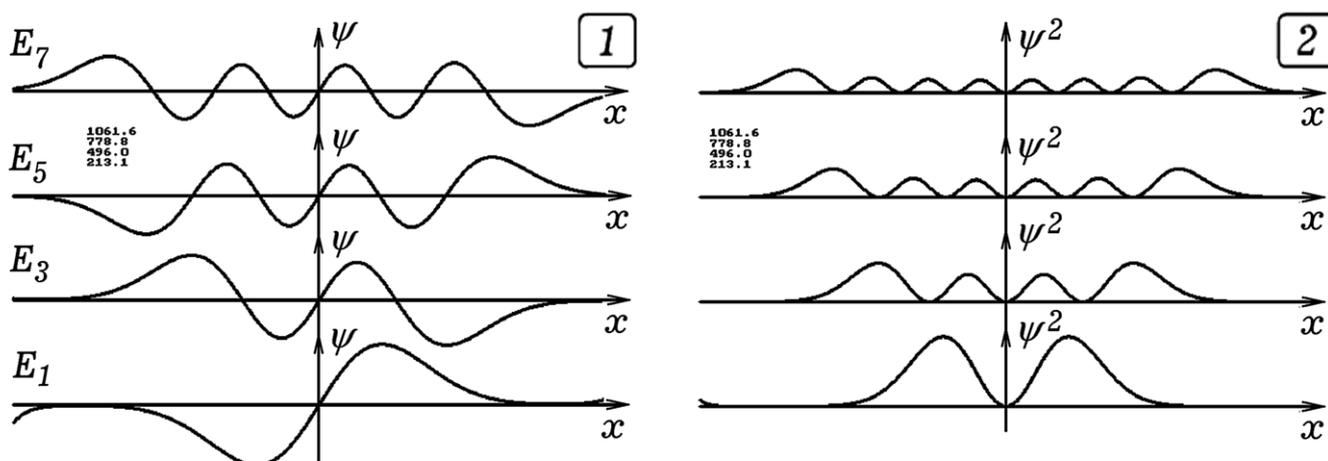


Рис. 13.18. Волновая функция и квадрат ее модуля для нечетных n

13.7. Простейшие модели атома и молекулы

Рассмотрим водородоподобный атом, состоящий из положительно заряженного ядра, в поле которого движется единственный электрон. Его волновая функция должна удовлетворять уравнению Шредингера в сферических координатах [1, с. 199-230]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi.$$

Волновая функция может быть представлена как произведение функций трех координат r , θ и φ : $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Для радиальной части $R = R(r)$ волновой функции получается:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0.$$

Задача 16. Рассчитайте радиальную составляющую волновой функции электрона, находящегося в поле положительно заряженного ядра, при различных квантовых числах n и l .

Подставим все константы и перейдем к $r' = 10^{12} r$ и $E' = 10^{37} E$:

$$\frac{d^2R}{dr'^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r'^2} - \left(1,64E' + \frac{3,77}{r'} \right) \right] R - \frac{2}{r'} \frac{dR}{dr'}.$$

Используемая программа ПР-12 рассчитывает радиальную часть волновой функции в состояниях $2s$ ($l=0, n=2$), $1p$ и $2p$ ($l=1, n=1$ и $n=2$). Чтобы построить графики зависимостей плотностей вероятностей от r , необходимо воспользоваться формулой $dp(r) = 4\pi r^2 R(r) dr$ (рис. 13.19).

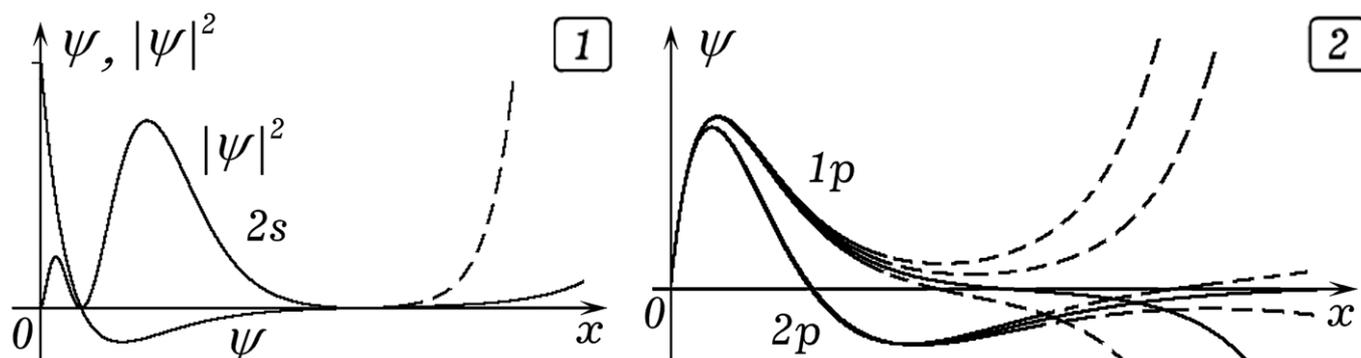


Рис. 13.19. Результаты расчетов $R = R(r)$ в состояниях $2s$, $1p$ и $2p$

Движение двухатомной молекулы можно свести к ее перемещению как единого целого, вращению и колебаниям относительно центра масс. Расчет колебательного движения сводится к задаче о движении частицы в потенциальном поле, описываемым потенциалом Леннарда-Джонса:

$$U(r) = \frac{\sigma_1}{r^n} - \frac{\sigma_2}{r^m}.$$

Пусть $n = 6$, $m = 3$. Используется программа ПР-13, результаты моделирования, соответствующие состояниям $n = 1, 2, 3$ и 4 (энергетические уровни E_1, E_2, E_3 и E_4), представлены на рис. 13.20.1, 13.20.2, 13.20.3 и 13.21.1. Из значений E_n видно, что с ростом n уровни энергии располагаются чаще.

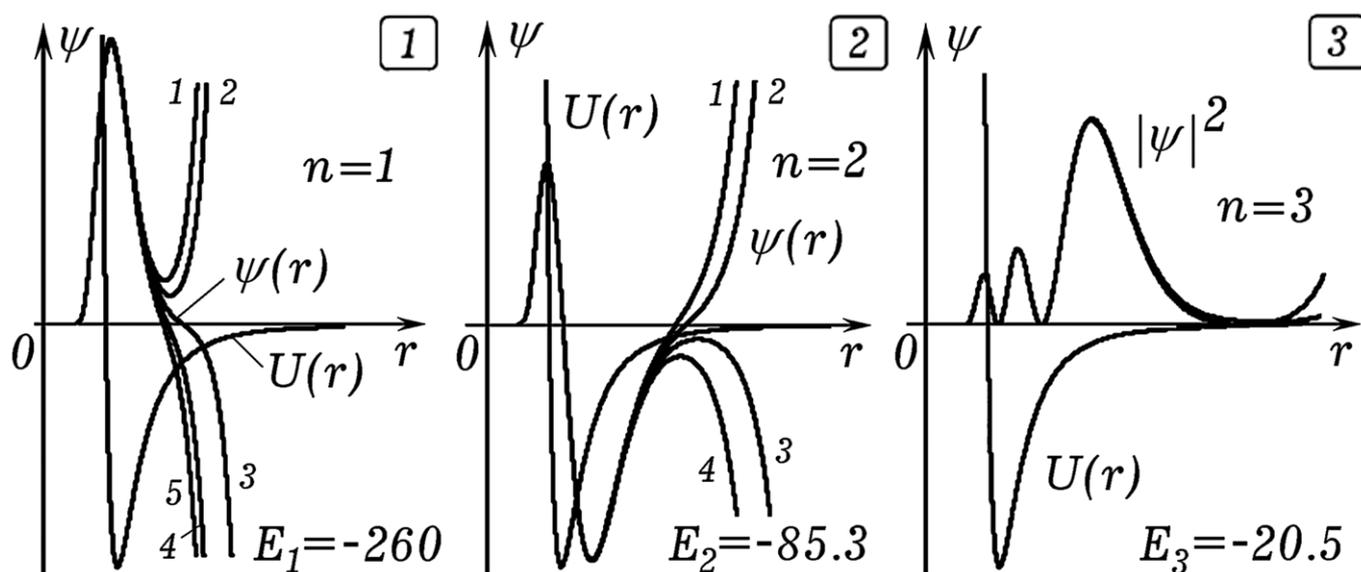


Рис. 13.20. Результаты расчета волновой функции при $n = 1, 2$ и 3

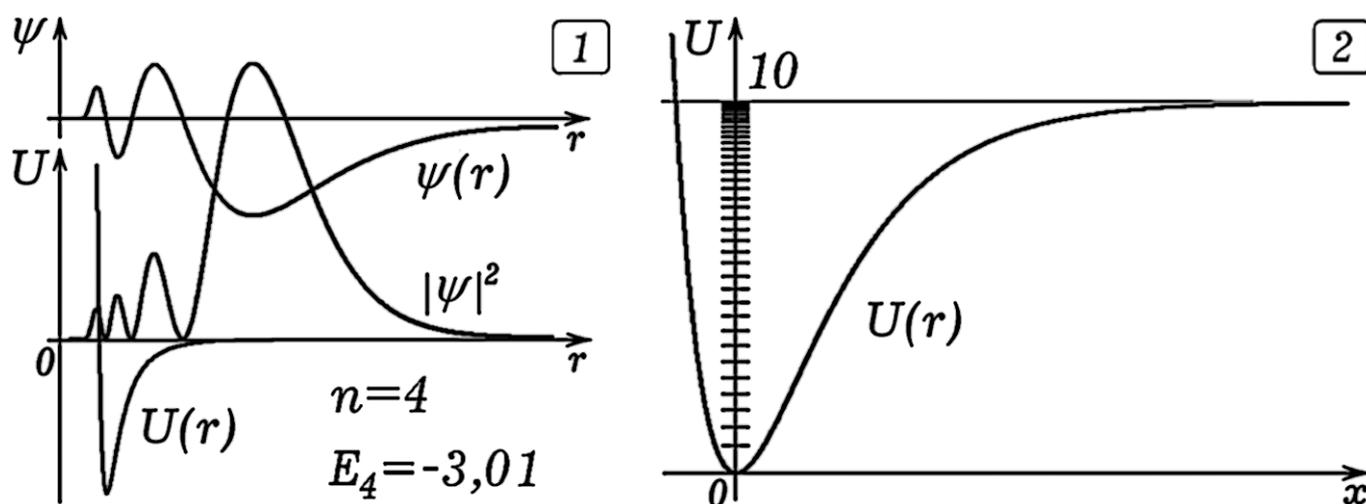


Рис. 13.21. Волновая функция двухатомной молекулы при $n = 4$ (1).
Стационарные уровни энергии для потенциала Морза (2)

Так как масса ядер достаточно велика, то для нахождения собственных значений E_n можно использовать **правило Бора-Зоммерфельда** [11, с. 487-505; 13, с. 178-182], согласно которому площадь, охваченная траекторией частицы в фазовом пространстве p_x и x , квантуется:

$$\oint p_x dx = \left(n + \frac{1}{2} \right) 2\pi\hbar, \text{ где } p = \sqrt{2m(E - U)} - \text{импульс частицы.}$$

Обозначая через 1 и 2 левую и правую точку останова, можно сказать, что система может находиться только в тех состояниях, для которых энергия E_n удовлетворяет требованию:

$$S = \frac{\sqrt{2m}}{\pi\hbar} \int_1^2 \sqrt{E_n - U(x)} dx = n + \frac{1}{2}.$$

Задача 17. Колебания двухатомной молекулы можно рассматривать как движение частицы в поле центральной силы, которое аппроксимируется потенциалом Морза: $U(x) = U_0(1 - \exp(-x))^2$, $U_0 = 10$. Необходимо рассчитать стационарные уровни энергии $E_1, E_2, E_3 \dots$ в единицах U_0 .

Используемая программа ТР-14 содержит цикл по i , в котором с небольшим шагом ΔE увеличивается энергия E и каждый раз рассчитывается интеграл S для некоторой частицы. При одновременном выполнении условий $S_i < n + 1/2$ и $S_{i+1} > n + 1/2$ результат выводится на экран в цифровом или графическом виде (рис. 13.21.2). При этом получается так: $E_1/U_0 = 0,075$, $E_2/U_0 = 0,123$, $E_3/U_0 = 0,169$ и т. д.

13.8. Прохождение частицы через потенциальный барьер

Прохождение микрочастицы сквозь потенциальный барьер называется **туннельным эффектом**. Если энергия частицы меньше высоты потенциального барьера, то все равно существует некоторая вероятность

туннелирования, то есть "просачивания" сквозь барьер. Из рис. 13.15 и 13.16 следует, что имеется отличная от нуля вероятность обнаружения частицы в классически запрещенной области, для которой $E < U$. Она по мере углубления частицы в стенку потенциальной ямы убывает по экспоненте. Если бы вместо стенки был потенциальный барьер, то микрочастица с некоторой вероятностью прошла бы через него! Понятно, что макроскопическая частица, энергия которой меньше высоты потенциального барьера, не сможет его преодолеть и отразится от него.

Теория туннельного эффекта предусматривает аналитическое решение уравнения Шредингера для трех областей: до потенциального барьера, внутри и после него. Получающиеся функции $\psi(x)$ в общем случае не смыкаются, в то время как состояние частицы должно описываться непрерывной и гладкой (без изломов) волновой функцией. Поэтому следует осуществить сопряжение этих решений, при котором выполнялись бы условия равенства волновых функций и их производных на обеих границах потенциального барьера. Кроме того, решение должно удовлетворять условию нормировки [13, с. 13]. При этом получается, что коэффициент прозрачности D потенциального барьера, равный вероятности туннелирования частицы, тем больше, чем меньше ширина барьера d и высота барьера U , а также чем выше энергия частицы E . Туннельный эффект имеет место при альфа-распаде ядер, при термоядерных реакциях, при автоэлектронной эмиссии, при контакте двух полупроводников и т. д.

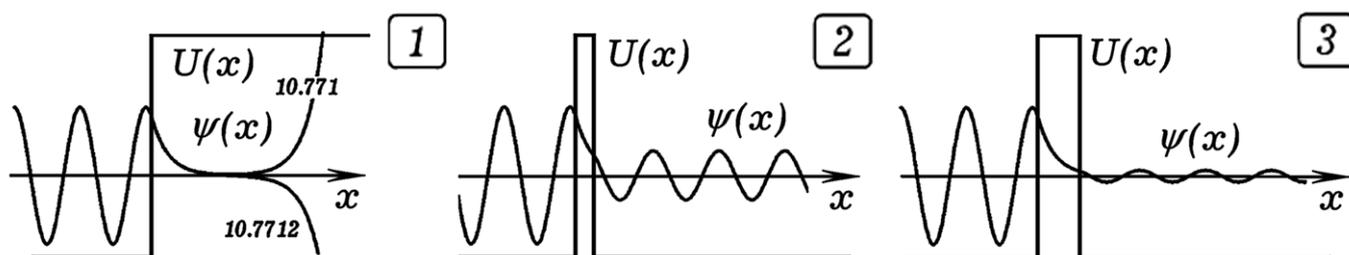


Рис. 13.22. Моделирование туннельного эффекта

Задача 18. Создайте компьютерную модель туннельного эффекта, заключающегося в прохождении частицы через потенциальный барьер.

Необходимо написать программу, позволяющую рассчитать волновую функцию частицы с энергией E , проходящей через потенциальный барьер высотой U и шириной d . Решение задачи состоит из двух этапов. Сначала решают задачу для частицы, движущейся к потенциальному барьеру высотой U бесконечной длины, похожему на одну стенку потенциальной ямы. При этом, изменяя фазу волновой функции (то есть значения $\psi(x)$ и ее производной при $x = 0$), следует подобрать такое ее значение, при котором функция $\psi(x)$ внутри бесконечно длинного потенциального барьера по экспоненте стремится к нулю (рис. 13.22.1). Подобранные значения $\psi(0)$ и $\psi'(0)$ (переменные f_1 и f_1'), повторяют запуск программы для потенциального барьера шириной d (рис. 13.22.2 и 13.22.3). Выполнив серию вычислений, можно убедиться в том, что чем меньше энергия частицы E , больше высота барьера U и его ширина d , тем меньше амплитуда $\psi(x)$ справа от него, а значит, и его коэффициент прозрачности D .

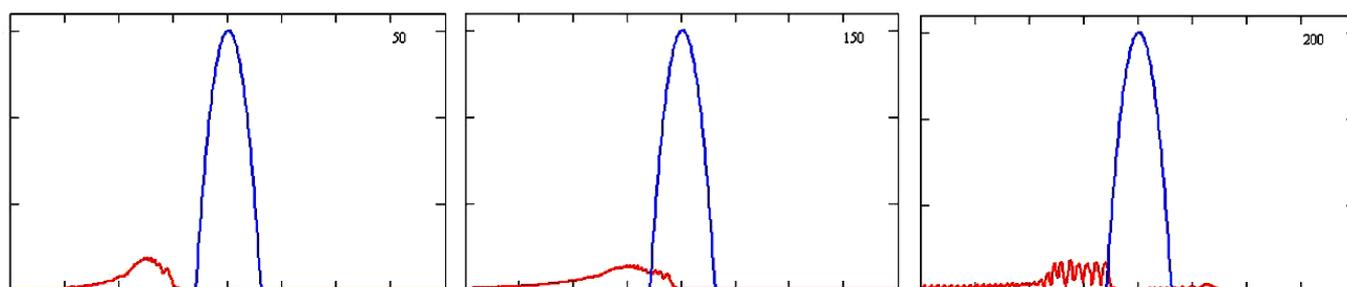


Рис. 13.23. Волновая функция в моменты 50, 150 и 200 [11, с. 506-520]

Рассмотрим еще одну модель столкновения микрочастицы с потенциальным барьером, в которой микрочастица моделируется **волновым пакетом**. Методы решения соответствующего нестационарного уравнения Шредингера описаны в [2, с. 289-299; 11, с. 506-520]. На рис. 13.23 приведены результаты расчетов, представленные в книге С. В. Поршнева [11, с. 515-519]. Синим цветом показан профиль потенциального барьера

$U(x)$, а красным - огибающая волнового пакета $|\psi(x)|^2$, который приближается к потенциальному барьеру слева, а затем частично отражается и частично проходит сквозь него. После этого существует отличная от нуля вероятность обнаружения частицы по обе стороны от барьера.

Приложение к главе 13

В приложении представлены тексты программ, которые позволяют промоделировать рассмотренные оптические и квантовые явления. Они написаны в средах Borland Pascal 7.0 и Free Pascal 1.0.10.

Программа ПР-1

```
Program Hod_luchei_kaplya;
uses crt, graph; const n=1.33; R=1;
var i,DV,MV: integer; a,b,fi,rho,cosb,sinb : real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
line(0,440,640,440);
Repeat inc(i); rho:=i/1000;
  a:=arctan(rho/sqrt(R*R-rho*rho));
  sinb:=sin(a)/n; cosb:=sqrt(1-sinb*sinb);
  b:=arctan(sinb/cosb); fi:=4*b-2*a;
  {writeln(rho,fi*180/3.1415926, fi);}
  circle(10+round((rho*300)),440-round(fi*300),2);
until (Keypressed)or(i>998);
Repeat until Keypressed; CloseGraph;
END.
```

Программа ПР-2

```
Program Ugol_otkloneniya_kaplya;
uses crt, graph; var rho,i,DV,MV: integer;
max,r,n,a,b,fi,cosb,sinb : real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
line(0,440,640,440); R:=100;
For i:=120 to 160 do begin n:=i/100;
  For rho:=50 to 99 do begin
    a:=arctan(rho/sqrt(R*R-rho*rho));
```

```

    sinb:=sin(a)/n; cosb:=sqrt(1-sinb*sinb);
    b:= arctan(sinb/cosb); fi:=4*b-2*a;
    If fi>max then max:= fi; end;
circle(10+round((n-1.1)*1000),440-round(max*200),2);
{writeln(n,' ',max*180/3.1415926);}
max:=0; end; Repeat until Keypressed; CloseGraph;
END.

```

Программа ПР-3

```

Program Sloistaya_sreda;
uses crt, graph; var i,EC,D,DV,MV: integer;
s,sina,cosa,tga,n,n1,n2,l,a,x,y: real;
Function PPrel(y:real): real;
begin If y>330 then PPrel:=1.1 else
    PPrel:=1.6+sin((100-y)/50)/2; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
For i:=0 to 2000 do begin
circle(10+round(100*PPrel(i/4)),500-round(i/4),1); end;
sina:=0.5; y:=1; x:=1; l:=0.1; n2:=PPrel(5*y);
For i:=1 to 15000 do begin n1:=PPrel(y);
    sina:=(n2/n1)*sina;
    If sina<1 then a:=arctan(sina/sqrt(1-sina*sina))
        else a:=3.1415926/2;
    If sina<1 then cosa:=sqrt(1-sina*sina);
    If sina>=1 then begin sina:=sin(a);
        cosa:=cos(a); end;
    n2:=PPrel(y); x:=x+l*sina; y:=y+l*cosa;
circle(10+round(x),500-round(y),1);
end; Repeat until Keypressed; CloseGraph;
END.

```

Программа ПР-4

```

Program Princip_Guigensa_Frenelya;
uses crt, graph; const dt=0.01;
var i,EC,D,DV,MV : integer; da,r1,r2,x1,x2,y1,y2: real;
pi,s,sina,cosa,alpha,c,n,n1,n2,l,a,x,y : real;
Function PPrel(x,y:real):real;
begin PPrel:=1;
    If ((x-150)*(x-150)+y-50)*(y-50)<50*50)

```

```

then PPre1:=1.7; If y>120 then PPre1:=1.7; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
pi:=arctan(1)*4; circle(310,300,100); circle(310,300,101);
For i:=1 to 15 do begin a:=-pi/2+i*pi/20;
x1:=10; y1:=100; x2:=x1+1*sin(a); y2:=y1-1*cos(a); c:=4;
Repeat If y1<>y2 then a:=arctan((x1-x2)/(y2-y1))
                                else a:=pi/2;
r1:=c*dt/PPrel(x1,y1); r2:=c*dt/PPrel(x2,y2);
da:=arctan((r2-r1)/1); a:=a+da;
x1:=x1+r1*cos(a); y1:=y1+r1*sin(a);
x2:=x2+r2*cos(a); y2:=y2+r2*sin(a);
{x2:=x1+1*sin(a); y2:=y1-1*cos(a);}
circle(10+round(2*x1),400-round(2*y1),1);
until (abs(x1)>320) or (abs(y1)>200) or (KeyPressed);
end; Readkey; CloseGraph;
END.

```

Программа ПР-5

```

Program Slogenie_voln;
uses crt, graph;
const N=640; M=480; A1=35; A2=30; alfa=0.2; Ms=10;
lambda=6; x1=120.5; y1=140; x2=360.5; y2=210; I0=10;
var x,y,DV,MV : integer; t,w,l1,l2,k,ksi,I,I1,I2: real;
BEGIN k:=2*3.1415/lambda; w:=10;
DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
Repeat t:=t+0.1;
For x:=1 to N do For y:=1 to M do begin
l1:=sqrt(sqr((x-x1)/Ms)+sqr((y-y1)/Ms));
l2:=sqrt(sqr((x-x2)/Ms)+sqr((y-y2)/Ms));
ksi:=A1*sin(-k*l1+w*t+alfa)/l1+A2*sin(-k*l2+w*t)/l2;
I1:=I0/l1; I2:=I0/l2;
I:=I1+I2+2*sqrt(I1*I2)*cos(k*(l1-l2));
putpixel(x,y,round(abs(ksi+3)) mod 15);
{putpixel(x,y,round(abs(I+3)) mod 15); }
end; until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Программа ПР-6

```

Program Difrakciya_na_krau;
uses crt, graph; const n=100; m=50; h=1;
var i,DV,MV,EC: integer;
Re,Im,y,d,l,dx,x,S,pi,lambda: real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
d:=5; dx:=0.002; pi:=3.1415; lambda:=0.2;
y:=-1; line(100,0,100,480);
Repeat Re:=0; Im:=0;
  For i:=1 to 10000 do begin
    x:=dx*i; l:=sqrt(d*d+(x-y)*(x-y));
    Re:=Re+cos(2*pi*l/lambda)*d/(l*l);
    Im:=Im+sin(2*pi*l/lambda)*d/(l*l); end;
  S:=Re*Re+Im*Im; y:=y+0.02;
  circle(round((1+y)*100),430-round(S*0.025),1);
until Keypressed; readkey; CloseGraph;
END.

```

Программа ПР-7

```

Program Difrakciya_shel;
uses crt, graph; var i,DV,MV : integer;
Im,Re,b,dx,x,fi,S,pi,lambda : real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
b:=0.7; dx:=b/1000; fi:=0; pi:=3.1415; lambda:=0.2;
Repeat Re:=0; Im:=0;
  For i:=1 to 1000 do begin x:=dx*i;
    Re:=Re+cos(2*pi*x*sin(fi)/lambda)*dx;
    Im:=Im+sin(2*pi*x*sin(fi)/lambda)*dx; end;
  S:=Re*Re+Im*Im; fi:=fi+0.001;
  circle(round(320+sin(fi)*200),450-round(S*600),1);
  circle(round(320-sin(fi)*200),450-round(S*600),1);
until fi>pi/2; Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Программа ПР-8

```

Program Svetimost_chernogo_tela;
uses crt, graph; const T=600; h=0.1;
var Gd,Gm : integer; R,F,max,w,wm: real;
BEGIN {Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');}

```

```
Repeat w:=w+h; F:=w*w*w/(exp(w/T)-1); R:=R+F*h;
  If F>max then begin wm:=w; max:=F; end;
{ circle(round(w/10),400-round(F/1E+6),1);}
until (KeyPressed)or(w>7E+3);
writeln('Integralnaya svetimost',R);
writeln('Dlina volni max',1/wm);
Repeat until KeyPressed; {CloseGraph;}
END.
```

Программа ПР-9

```
Program Potenc_yama;
uses crt, graph;
const dx=0.002; dE=1; aa=0.0001; U1=5000; U2=2000;
var h,Gd,Gm : integer; U,E,x,a,fi,fi1: real;
EE: string;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');
E:=136; a:=50; x:=-20;
Repeat x:=x+0.2; U:=U1;
  If (x>0)and(x<a) then U:=0; If x>a then U:=U2;
  circle(100+round(x*5),470-round(U/15),1);
until x>80;
Repeat x:=-20; fi1:=0.0001; fi:=0;
  Repeat x:=x+dx; U:=U1;
    If (x>0)and(x<a) then U:=0; If x>a then U:=U2;
    fi1:=fi1-aa*(E-U)*fi*dx; fi:=fi+fi1*dx;
    circle(100+round(x*5),220-round(fi*fi/1500),1);
    circle(100+round(x*5),350-round(fi/3),1);
  until (KeyPressed)or(abs(fi)>1000); E:=E+dE;
h:=h+10; Str(E:5:1,EE); OuttextXY(530,10+h,EE);
until KeyPressed; ReadKey; CloseGraph;
END.
```

Программа ПР-10

```
Program Variacionnii_metod;
{$N+}uses crt, graph;
const dx=0.01; l=1; N=60; a=10; b=50; c=25;
var h,hh,Gd,Gm,i,j,tt:integer; k: longint;
S,S2,U,E,E1,r,x,aa: single; EE: string;
ps:array[0..N+3]of single;
```

```

Procedure Resh;
begin S:=0; S2:=0; i:=0;
Repeat inc(i); x:=i*dx; U:=0;
  If (i>a)and(i<b) then U:=-6;
  If (i>c)and(i<b) then U:=-18;
  S:=S+ps[i]*0.02*(U-(ps[i-1]-2*ps[i]+ps[i+1])
  /dx/dx)*dx; S2:=S2+ps[i]*ps[i]*dx;
until (i>N)or(keypressed); E:=S/(S2+1E-4); end;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');
randomize; For i:=1 to N do ps[i]:=0.02;
Repeat Resh; E1:=E; j:=round(random*N); aa:=ps[j];
  ps[j]:=ps[j]+(random-0.5)/200; ps[1]:=0; ps[N]:=0;
  Resh; If E>E1 then ps[j]:=aa; inc(k);
  {If (E<E1) then writeln(k,' ',E);}
  circle(10+round(k/100),round(-E*40),1);
{ If (E<E1)and(k mod 100=0) then begin
  cleardevice; rectangle(10+8*a,0,10+8*b,800);
  line(10+8*c,440,10+8*c,800);
  For i:=1 to N do
    circle(10+8*i,400-round(ps[i]*5E+3),2);
  For i:=1 to N do circle(10+8*i,
    400-round(ps[i]*ps[i]*4E+5),2); end;}
until (KeyPressed); ReadKey; CloseGraph;
END.

```

Программа ПР-11

```

Program Garmonoch_oscillator;
uses crt, graph;
const dx=0.002; dE=1; aa=0.0001; U1=5000; U2=2000;
var h,hh,Gd,Gm: integer; U,E,x,a,fi,fi1,fi2: real;
EE: string;
Procedure Vich;
begin a:=50; x:=-40;
Repeat x:=x+0.02; U:=U1; U:=5*x*x;
circle(320+round(x*5),470-round(U/15),1); until x>180;
Repeat x:=0; {fi1:=0; fi:=50;} fi1:=8; fi:=0;
Repeat x:=x+dx; U:=0.5*x*x;
  fi2:=-aa*(E-U)*fi; fi1:=fi1+fi2*dx; fi:=fi+fi1*dx;
  circle(320+round(x*5),400-hh-round(fi*fi/50),1);

```

```

circle(320-round(x*5),400-hh-round(fi*fi/50),1);
circle(320-round(x*5),400-hh,1);
circle(320+round(x*5),400-hh,1);
until (x*5>290)or(abs(fi)>1000000);
E:=E+dE; h:=h+10; Str(E:5:1,EE); OuttextXY(530,h,EE);
until x*5>250; end;
BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');
hh:=300; E:=1060.6; Vich; hh:=200; E:=777.8;
Vich; hh:=100; E:=495.0; Vich; hh:=0; E:=212.15; Vich;
Repeat until KeyPressed;
END.

```

Программа ПР-12

```

Program Atom_vodoroda;
{$N+}uses crt, graph; const dr=0.001; l=1;
var i,k,Gd,Gm:integer; RR,R1,R2,P,U,E,r:single;
Procedure Raschet;
begin r:=0; R1:=0.1; RR:=0.01; If E>0 then E:=0;
Repeat r:=r+dr; U:=-3.77/r;
R2:=(1*(1+1)/r/r-(1.64*E-U))*RR-2*R1/r;
R1:=R1+R2*dr; RR:=RR+R1*dr;
circle(120+round(r*30),400-round(RR*3E+1),1);
P:=r*r*RR*RR; If P>400 then P:=400;
circle(120+round(r*30),400-round(P*1),1);
until (r>20)or(abs(RR)>50)or(keypressed); end;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');
line(120,0,120,480); line(0,400,640,400); E:=-0.57;
Repeat E:=E+0.01; If E<-0.53 then Raschet;
If (E>-0.26)and(E<-0.23) then Raschet;
until (KeyPressed); CloseGraph;
END.

```

Программа ПР-13

```

Program Dvuhatomnaya_molekula;
{$N+}uses crt, graph; const dx=0.001; aa=3.5E-4;
var h,Gd,Gm,i:integer; U,E,x,fi,fi1,fi2:single; EE:string;
Procedure Raschet; begin
Repeat x:=5; fi1:=1E-11; fi:=0;
Repeat x:=x+dx; U:=150*(-3E+4/x/x/x+8E+7/x/x/x/x/x/x);
fi2:=-aa*(E-U)*fi; fi1:=fi1+fi2*dx; fi:=fi+fi1*dx;

```

```

circle(120+round(x*2),150-round(fi/8),1);
circle(120+round(x*2),350-round(fi*fi/2000),1);
until (x*2>550)or(abs(fi)>1E+3)or(keypressed);
Str(E:5:3,EE); h:=h+10; OuttextXY(10,h,EE); E:=E-0.1;
until (x*2>550)or(keypressed); end;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');
x:=5; line(120,0,120,480); line(120,150,600,150);
Repeat x:=x+0.001;
U:=150*(-3E+4/x/x/x/x+8E+7/x/x/x/x/x/x/x/x);
circle(120+round(x*5),350-round(U/3),1); until x>180;
Repeat E:=-3.01{20.6}; Raschet;
until (KeyPressed);
repeat until (KeyPressed); CloseGraph;
END.

```

Программа ПР-14

```

Program Potencial_Morza;
{$N+}uses crt, graph; const dx=0.002;
var n,Gd,Gm: integer; P,PP,S,U,E,x: single;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');
line(0,400,640,400); line(60,0,60,480); x:=-1;
Repeat x:=x+0.001; U:=10*sqr(1-exp(-x));
circle(60+round(70*x),400-round(30*U),1); until x>8;
Repeat S:=0; E:=E+0.01; x:=-1;
Repeat x:=x+0.01; U:=10*sqr(1-exp(-x));
If E>U then S:=S+20*sqr(E-U)*dx; until x>50;
PP:=P; P:=S;
For n:=1 to 100 do If (PP<n+0.5)and(P>n+0.5) then
line(50,400-round(30*E),70,400-round(30*E));
until (KeyPressed)or(E>10);
Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Список литературы

1. Аюста В., Кован К., Грэм Б. Основы современной физики / пер. с англ. В. В. Толмачева, В. Ф. Трифонова; под ред. А. Н. Матвеева. М.: Просвещение, 1981. 495 с.

2. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. В 2 ч. Ч. 2. М.: Мир, 1990. 400 с.
3. Захарьев Б. Н., Чабанов В. М. Послушная квантовая механика. Новый статус теории в подходе обратной задачи. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 300 с.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
5. Кашурников В. А., Красавин А. В. Вычислительные методы в квантовой физике: учеб. пособие. М.: МИФИ, 2005. 412 с.
6. Кунин С. Вычислительная физика. М.: Мир, 1992. 518 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Квантовая механика. М.: Наука, 1989. Т. 3. 767 с.
8. Майер В. В. Свет в оптически неоднородной среде: учебные исследования. М.: Физматлит, 2007. 232 с.
9. Майер Р. В. Компьютерное моделирование физических явлений. Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т, 2009. 112 с.
10. Неймарк Ю. И. Математические модели в естествознании и технике: учебник. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2004. 401 с.
11. Поршнева С. В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. М.: Горячая линия - Телеком, 2003. 592 с.
12. Савельев И. В. Курс общей физики: учеб. пособие. В 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. М.: Наука, 1988. 496 с.
13. Савельев И. В. Основы теоретической физики: Квантовая механика. М.: Наука, 1977. 352 с.
14. Giordano N. J. Computational Physics. New Jersey, Prentice Hall, 1997. 419 p.

[**ВВЕРХ**](#)