Р.В. Майер

Сложность решения учебной задачи

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГЛАЗОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В. Г. КОРОЛЕНКО»

Р. В. Майер

СЛОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ УЧЕБНОЙ ЗАДАЧИ

Монография

Научное электронное издание
на компакт-диске

Глазов
ГИПУ
2026

ISBN 978-5-93008-463-4

УДК 37.02
ББК 32.81
М14

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом ФГБОУ ВО «Глазовский государственный инженерно-педагогический университет имени В. Г. Короленко». Протокол № 14 от 14.10.2025

Рецензенты:

А. А. Мирошниченко, доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой педагогики и психологии ФГБОУ ВО «Глазовский государственный инженерно-педагогический университет имени В. Г. Короленко»;

Ю. А. Сауров, доктор педагогических наук, профессор, член-корреспондент РАО, профессор кафедры физики и методики обучения физике ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

М14 **Майер, Р. В.** Сложность решения учебной задачи : монография / Р. В. Майер. – Глазов : ГИПУ, 2026. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Монография посвящена актуальной проблеме дидактики, состоящей в разработке методов оценки дидактической сложности физических и математических задач. Ее решение поможет оценить сложность различных теоретических задач и оптимизировать процесс обучения. Определено понятие дидактической сложности задачи, выявлены факторы, влияющие на ее сложность, рассмотрены методы оценки сложности логических рассуждений, физической, математической и вычислительной составляющих сложности задачи, основанные на контент-анализе ее условия и решения. Изучена система формульных знаний школьного курса физики, произведена оценка сложности различных понятий и физических формул, а также неопределенности выбора метода решения.

Монография предназначена для ученых и работников образования, интересующихся проблемами обучения, а также студентов педвузов.

Системные требования: процессор с тактовой частотой 1,3 ГГц и выше; 256 Мб RAM; свободное место на HDD 3,8 Мб; Windows 2000/XP/7/8/10; Adobe Acrobat Reader; дисковод CD-ROM 2-скоростной и выше; мышь.

Научное издание

Майер Роберт Валерьевич

СЛОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ УЧЕБНОЙ ЗАДАЧИ

Монография

Технический редактор, корректор *М. В. Пермякова*
Оригинал-макет: *А. В. Абдулова*

Рисунок для обложки сгенерирован при помощи нейросети «Алиса»

Подписано к использованию 23.01.2026. Объем издания 3,8 Мб.
Тираж 8 экз. Заказ № 166-2026.

ФГБОУ ВО «Глазовский государственный инженерно-педагогический университет имени В. Г. Короленко»

427621, Россия, Удмуртская Республика, г. Глазов, ул. Первомайская, д. 25
Тел./факс: 8 (34141) 5-60-09, e-mail: izdat@mail.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как сказал Стивен Хокинг, XXI век будет веком сложности. Последние десятилетия развивается сложностно-синергетический подход, предполагающий применение сложностного мышления, выявление взаимодействующих элементов системы, обеспечивающих ее эмерджентное поведение, анализ иерархических структур, прямых и обратных связей, точек полифуркации, аттракторов и т. д. С этих позиций важной характеристикой любого объекта или процесса является его сложность. Обучение сводится к построению в сознании учеников достаточно сложной системы знаний, правильно объясняющей окружающие явления.

Важным способом развития научного мышления и формирования соответствующих когнитивных навыков является решение специально подобранных задач, предъявляемых учащимся в «правильной» последовательности, как того требует дидактический принцип «от простого к сложному». Понятно, что сложность задачи должна соответствовать уровню знаний ученика. Поэтому проблема оценки дидактической сложности объяснения физической или математической задачи является актуальной. Ее разрешение позволит оптимизировать учебный процесс и контроль знаний, быстро и правильно определять дидактическую сложность заданий для ЕГЭ, физических олимпиад, различных задачников и тестовых материалов.

Разработка методов оценки сложности задач, основанных на анализе их условий и решений, а также учете семантической сложности используемых понятий, позволит создать адаптивные системы обучения, обеспечивающие усвоение материала и развитие когнитивных навыков. Также это будет способствовать развитию автоматизированных систем оценки сложности учебных задач, что поможет объективно оценить учебные достижения обучающихся.

Р. В. Майер

ВВЕДЕНИЕ

Задачи по физике и математике играют большую роль в формировании научного мышления школьников и студентов. Они позволяют закрепить знания и интеллектуальные навыки, развивают аналитические способности и логическое мышление, способствуют пониманию практического применения теории, повышают самостоятельность и уверенность в своих силах. Решая задачи, школьники учатся моделировать практические ситуации, у них формируются навыки решения практических проблем и критическое мышление.

Умение оценивать сложность задачи и ее частей – важный навык любого специалиста. Это помогает эффективно планировать свою работу, распределять ресурсы и достигать поставленных целей. Недооценка сложности может привести к задержкам, ошибкам и разочарованию, в то время как их адекватная оценка позволяет выбрать оптимальный подход и успешно решить даже самые сложные задачи.

Совершенствование методики обучения требует разработки методов оценки дидактической сложности теоретических задач, используемых на уроке. От сложности задачи зависит вероятность ее решения учеником с определенным уровнем знаний. Зная, во сколько раз одна задача сложнее другой, можно оптимизировать методику обучения и более объективно оценить работу школьников или студентов. Ошибочная оценка сложности может привести к понижению мотивации учащихся, уменьшению интереса к предмету, а также к формированию неправильных представлений о собственных способностях.

Актуальность проблемы оценки дидактической сложности учебных задач обусловлена тем, что: 1) важнейший принцип теории обучения «от простого к сложному» требует постепенного увеличения сложности решаемых задач;

2) интеллектуальные способности ученика и сложность его знаний должны соответствовать сложности решаемых задач; 3) сложность задачи характеризует информативность используемого учебного материала и является показателем интеллектуального уровня школьника, который способен ее решить; 4) разработка методики оценки когнитивной сложности решения задач школьниками и студентами позволит создать автоматизированную систему их оценки, правильно интерпретировать результаты контроля знаний и умений, объективно оценить уровень их учебных достижений.

Цель исследования заключается в разработке и совершенствовании эффективного метода оценки дидактической сложности учебных теоретических задач по физике и математике, основанного на семантическом анализе их решений. Достижение этой цели предполагает разрешение следующих проблем: 1) определение понятия «сложность учебной задачи»; 2) разработка общих подходов к оценке сложности учебных задач и их апробация на конкретных примерах; 3) исследование системы формульных знаний по физике; 4) оценка сложности физических формул; 5) выявление методов решения физических задач и оценка их сложности. Обозначенная цель перекликается с проблемами использования математических методов в гуманитарных исследованиях, определения когнитивной сложности различных дидактических объектов, нахождения общей информативности учебных текстов и средней плотности информации. Перечисленные вопросы тесно связаны с использованием методов цифровой гуманитаристики: контент-анализ текстов, выявление ключевых понятий, кластеризация объектов, оценка «количества качества» в объекте и т. д.

Методологической основой настоящего исследования являются работы известных ученых по следующим направлениям:

1) теория и практика обучения: В. С. Аванесов [1], Е. И. Вараксина [14], Э. Г. Гельфман и М. А. Холодная [16], В. А. Гусев [21], М. А. Захарищева [30], И. Я. Лернер [46], В. В. Майер [50], Е. И. Машбиц [76], А. М. Новиков [85], Ю. А. Сауров [99];

2) математические методы в гуманитарных исследованиях: Н. Ф. Добрынина [23], Г. Дэвид [24], В. А. Дюк [25], Ю. А. Ивашкин и Е. А. Назойкин [34], А. С. Казаринов [36], В. Б. Кудрявцев, К. Вашик и А. С. Строгалов [41], Л. П. Леонтьев и О. Г. Гохман [45], Д. Ф. Люгер [49], Ф. С. Робертс [93], А. В. Соловов, А. А. Меньшиков [101], В. Е. Фирстов [108], Р. Шеннон [113], М. В. Ядровская [115], W. S. Torgerson [131];

3) квалиметрические методы анализа текстов: Г. Е. Крейдлин и А. Д. Шмелев [39], В. Соловьёв, М. Солнышкина, М. Андреева, А. Данилов и Р. Замалетдинов [130], А. М. Сохор [102], А. И. Субетто [104], Е. Я. Таршис [105], В. И. Шалак [111], D. S. McNamara, A. C. Graesser, P. McCarthy & Z. Cai [128], M. D. White & E. E. Marsh [132];

4) тезаурусный подход: Ю. А. Алябышева, А. Ю. Антонов и А. А. Веряев [2], Вал. А. Луков и Вл. А. Луков [47], А. А. Мирошниченко [77], И. Ф. Неволин и М. Б. Позина [84];

5) семантический подход: Н. К. Андриевская [4], С. Х. Бермудес [10], О. В. Зеркаль [31], С. В. Ракитина [92], C. D. Manning, P. Raghavan & H. Schutze [120];

6) концепция сложности и сложностного мышления: В. И. Аршинов и Я. И. Свирский [6], А. Н. Колмогоров [37], П. В. Ополев [86; 87], М. В. Рыжаков [94], Д. Орлов и И. Крайнова [88], Н. В. Сафонова [100], B. Davis & D. Sumara [118];

7) трудность и сложность учебных задач: В. С. Бабаев, М. В. Кулагина и Ю. Ю. Шкитина [7], Г. А. Балл [8], Г. Д. Бухарова [12], А. В. Гидлевский [19], А. С. Гунасекера [20], О. Б. Епишева и В. И. Крупич [27], Н. С. Журавлева [29], В. М. Кротов [40], А. Н. Лазарев и М. В. Чистяков [43], Л. А. Ларченкова [44], Н. Г. Рыженко [95], А. Л. Сакович [97], А. П. Усольцев и Т. Н. Шамало [106], Л. М. Фридман [109], М. Ханакова [119];

8) трудность и сложность учебного текста: А. Я. Вахрушева, М. И. Солнышкина, Р. В. Куприянов, Э. В. Гафиятова и И. О. Климагина [15], Ч. Р. Зи-

ганшина, Э. М. Вильданов, Т. В. Мазаев и А. М. Айдарова [32], М. А. Зильберглейт, М. М. Невдах и Ю. Ф. Шпаковский [33], С. И. Монахов, В. В. Турчаненко, Е. А. Федюкова и Д. Н. Чердаков [78], О. Э. Наймушина и Б. Е. Стариченко [82], И. С. Наумов и В. С. Выхованец [83], Н. Б. Самсонов, Е. В. Чмыхова и Д. Г. Давыдов [98].

Нами применялись следующие **методы исследования:** общетеоретические методы познания (анализ и синтез, индукция и дедукция, сравнение, классификация и т. д.), логические рассуждения, системный подход [5], тезаурусный подход [2], методология мягких систем [117], методы качественного, математического и компьютерного моделирования [113], статистических испытаний, контент-анализа [111; 132], кластерного анализа [120], методы вербального кодирования, измерения количества семантической информации в тексте, построения графиков, графов и диаграмм. Математическая обработка результатов осуществлялась в электронных таблицах *Excel*. Для автоматического выявления терминов в решениях учебных задач и учете их сложностей использовались специальные компьютерные программы, написанные в среде *ABCPascal,* а также ресурсы Интернета, позволяющие в режиме онлайн определить частоту терминов в тексте, автоматически построить облака слов и семантические сети.

В монографии представлено обобщение и развитие идей, рассмотренных автором в книгах [54; 55; 61; 72] и статьях, посвященных следующим вопросам: 1) математическое и компьютерное моделирование учебного процесса [51–53; 57; 65; 121]; 2) сложность математической информации и ее оценка [56; 58; 62–64; 124–126]; 3) «измерение» сложности учебных текстов и задач [59; 60; 66–71; 73; 122; 123; 127].

1. УЧЕБНАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ СЛОЖНОСТЬ

Традиционное обучение предусматривает передачу знаний учащимся, формирование у них определенных умений и навыков. Часто применяемая на уроках методика, предполагающая конспектирование школьником изучаемого материала, не приводит к формированию творчески активной личности. Для развития креативности школьники должны выполнять задания творческого характера, например решать экспериментальные и теоретические задачи. Изучение физики, математики и других наук предусматривает решение большого количества учебных задач теоретического плана, каждой из которых соответствует своя проблемная ситуация. Это позволяет повысить прочность усвоения изученного материала, научиться применять знания на практике, активизировать мыслительную деятельность учеников и т. д. [21].

Как известно, **проблемные ситуации** состоят из компонентов: субъект (ученик), объект его деятельности, преграда на пути осуществления цели его деятельности, например недостаток знаний, отсутствие способов достижения цели и т. д. [109, с. 14]. Л. М. Фридман отмечает, что проблемная ситуация – «осознанное субъектом затруднение, способ устранения которого он желает найти», а задача – это описание конкретной проблемной ситуации [109].

1. Понятие учебной задачи. В теории учебной деятельности вместо термина «учебная задача» используется более широкое понятие – учебное задание, являющееся основной единицей учебно-познавательной деятельности. К учебным заданиям относятся конспектирование учебника или лекции, подготовка к лабораторной работе или ее выполнение, решение теоретических и практических задач и т. д. Мы ограничимся рассмотрением учебных теоретических задач, основанных на проблемных ситуациях, которые должен разрешить учащийся, используя исключительно теоретические методы познания. Решения таких задач представляют собой совокупность связанных идей (законов, теорем, формул), приводящих от условия к результату.

Задачный подход к обучению состоит в том, что учебный процесс рассматривается как решение упорядоченной последовательности задач (или выполнение ряда учебных заданий) различной сложности. Соответствующая методика включает в себя понятийный аппарат (задача, ситуация, проблема и др.), теорию учебных задач, классификацию задач, задачные системы обучения, технологии задачного обучения [8; 85; 106]. Применение задачного подхода способствует формированию у обучаемых научного мышления, развитию интеллекта и творческих способностей.

Учебной задачей называют элемент учебной деятельности, включающий в себя содержание (предмет, условие и требование, то есть данные и искомые величины) и средства решения (методы и способы, приемы и средства). В психологии учебная задача (УЗ) рассматривается как системный объект, обеспечивающий усвоение теоретических положений, как средство формирования и развития мышления, как форма усвоения знаний, результат усвоения знаний и показатель их эффективности [16; 29; 109]. Решая УЗ, ученик пытается «сложить пазл», получить последовательность жестко связанных между собой умозаключений, приводящих к некоторому познавательному результату [72, с. 60].

Формулировка задачи содержит условие и требования, то есть искомые величины. К условию УЗ относятся исходные данные, упоминаемые в тексте задачи, и привнесенные данные, которые ученик берет из учебника, таблиц и т. д. Решить физическую или математическую задачу – значит осуществить логический вывод, провести цепочку рассуждений, состоящую из логически связанных утверждений, которые: 1) удовлетворяют условию задачи; 2) согласуются с законами физики и/или правилами математических преобразований; 3) соответствуют правилам логического вывода; 4) позволяют найти ответ на поставленный вопрос.

Г. А. Балл в своей монографии [8] рассматривает учебную задачу в двух аспектах: 1) как цель деятельности; 2) как ситуацию, провоцирующую ученика на определенные действия, направленные на поиск неизвестного на основе его связей с известным. В одних случаях ученик представляет, как решать задачу, а в других – нет. Л. М. Фридман в составе задачи выделяет: 1) предметную область, то есть множество рассматриваемых объектов; 2) связывающие эти объекты отношения; 3) требование задачи, то есть искомые величины; 4) оператор задачи или совокупность тех действий, которые ученик должен произвести, чтобы ее решить [109]. Г. Д. Бухарова рассматривает УЗ как систему, состоящую из: 1) задачной подсистемы (условие и требование, то есть данные и искомые величины); 2) решающей подсистемы (методы ее решения). В процессе решения УЗ ученик разрешает противоречие между условием и требованием задачи [12].

Мы под учебной задачей будем понимать конкретную проблемную ситуацию, требующую разрешения и используемую в целях обучения [8; 106]. Ограничимся рассмотрением только **корректно сформулированных задач,** у которых: 1) условие не противоречит основным идеям соответствующей дисциплины (физики, химии, геометрии и т. д.); 2) существует решение, и оно единственное (например, полное решение уравнения может иметь четыре корня); 3) исходных данных достаточно для получения определенного ответа на заданный вопрос. Иногда выдвигается требование **устойчивости решения** к изменению входных параметров: их небольшие вариации не должны приводить к существенным изменениям ответа. Недоопределенные (условие содержит недостаточно информации для однозначного решения), плохо обусловленные и неустойчивые задачи рассматриваться не будут.

2. Сложность и трудность задачи. Что следует понимать под дидактической сложностью задачи? Интуитивно понятно, что это должна быть объективная характеристика УЗ, зависящая от количества усилий, интеллектуальных и временных затрат ученика, необходимых для ее решения. Она связана с субъективной характеристикой УЗ – трудностью для данного ученика. **Трудность учебной задачи** (или субъективная сложность) показывает количество затраченных усилий конкретного ученика, решившего данную задачу; она зависит не только от сложности УЗ, но и от его знаний, умений и навыков [27; 43]. Сложность УЗ – это «объективная многофакторная количественная характеристика учебного задания, отражающая число и характер мыслительных операций, необходимых для его решения нормативным способом» [82].

В задачах используются простые и сложные операции. Все задачи можно разделить на **две группы:** 1) рутинные, трудоемкие задачи, требующие выполнения большого числа не очень сложных операций (например, запись таблицы умножения на 7 или 8 в 10 классе); 2) задачи, требующие от ученика применения знаний и умений, находящихся вблизи границы его интеллектуальных возможностей (взятие производной или интеграла). Рассмотрим две задачи З-1 и З-2, решение которых сводится к выполнению 10 операций (рис. 1.1). Сложности решения задач, равные суммам сложностей операций $s_{оп}$, одинаковы S = 32 (таблица слева). Задача З-1 требует выполнения операций, сложность которых не превышает 5, а задача З-2 предполагает, что ученик выполнит операцию 4 со сложностью 12. Очевидно, что со второй задачей справятся только те ученики, которые смогут выполнить операцию 4.

N	З-1	З-2
1	3	2
2	4	2
3	3	4
4	2	12
5	5	3
6	3	2
7	4	3
8	3	1
9	3	2
10	2	1
S	32	32

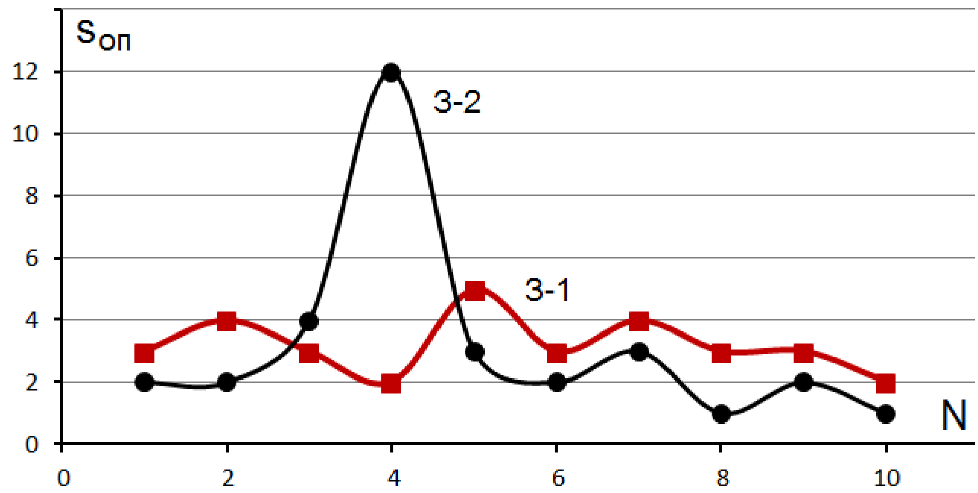


Рис. 1.1. Сложность задачи как сумма сложностей операций

Таким образом, сложность задачи зависит от следующих факторов:

1. Количество элементарных операций, общая трудоемкость. Чем больше операций необходимо выполнить для решения УЗ, тем сложнее задача. Это относится как к алгоритмическим задачам, так и к задачам, требующим аналитических или творческих усилий. Большой объем работы может оказаться непосильным, даже когда отдельные шаги относительно просты.

2. Средняя сложность операций. Задача, требующая нескольких простых шагов, обычно проще, чем задача, где каждый шаг подразумевает глубокий анализ и принятие непростых решений. Оценка средней сложности УЗ часто требует профессионального подхода и понимания предметной области.

3. Сложность наиболее сложной операции. Одна очень сложная операция может значительно увеличить общую сложность задачи, даже если все остальные операции относительно просты. Определение этой «ключевой» операции и поиск путей ее упрощения часто приводит к успешному решению УЗ.

Взаимодействие и взаимовлияние этих факторов может приводить к непредсказуемому результату. Важно учитывать **их синергию,** чтобы получить адекватную оценку общей сложности задачи. УЗ с небольшим числом операций, но с чрезвычайно сложной ключевой операцией может оказаться сложнее задачи с большим количеством простых операций. Например, задачи, требующие решения дифференциального уравнения или взятия интеграла, слишком сложны для девятиклассника, но могут быть решены выпускником школы.

Решение учебной задачи – это **вероятностный процесс.** Если допустить, что реализация каждой операции – статистически независимое событие, то вероятность получения положительного результата будет равна произведению вероятностей успешного выполнения каждой операции:

$$P = \prod_{i=1}^{N} p_i = p_1 p_2 \dots p_N .$$

Вероятность выполнения учеником i-й операции описывается логистической (сигмазоидной) функцией: $p_i(S_i, Zn_i) = 1/[1 + \exp(-\alpha(Zn_i - S_i))]$, где Zn_i –

уровень знаний (умений) ученика, S_i – сложность i-й операции. Когда $Zn_i >> S_i$, вероятность $p_i \to 1$, а когда $Zn_i << S_i$, $p_i \to 0$. Если $Zn_i = S_i$, то вероятность $p_i = 0{,}5$. То есть **сложность выполнения операции** (или решения УЗ) равна количеству знаний ученика, решающего данную задачу с вероятностью 0,5.

Проблемой определения **сложности учебных задач** (УЗ) занимались различные исследователи (И. Л. Лернер, А. Н. Колмогоров, А. В. Гидлевский и др.). Например, А. Н. Колмогоров считает, что сложность задачи определяется длиной наиболее рационального алгоритма получения правильного ответа [37], который включает в себя кратчайший путь понимания условия; поэтому она пропорциональна количеству операций, необходимых для решения УЗ. Другие исследователи утверждают, что сложность – объективная характеристика задачи, зависящая от числа производимых действий (операций) и их видов [7; 8]. В. М. Кротов предложил таблицу сложности физических задач, учитывающую структуру решения, количество явлений, процессов и объектов, число искомых величин, явное или неявное задание требований задачи, сложность математического аппарата, способ задания условия [40]. А. В. Гидлевский использовал логический подход к оценке трудности УЗ, основанный на создании соответствующих графологических моделей [19], учете числа вершин и ребер графа, отображающего структуру решения УЗ. Недостатком этого метода является то, что он не учитывает семантическую сложность используемых понятий.

Другие ученые-методисты в качестве **компонентов сложности** УЗ называют: количество и сложность элементов, связей между ними, логических действий, формул; степень абстрактности используемых понятий и моделей; наличие неявно заданных факторов, влияющих на анализируемое явление; избыточность условия УЗ; принадлежность задачи к различным темам; необходимость проведения громоздких математических преобразований и т. д. [8; 12; 29; 43; 44; 106]. Эти и другие подходы, основанные на анализе синтаксической структуры задачи, учете количества используемых понятий и логических операций, не всегда приводят к правильным результатам.

Известны и другие **способы оценки дидактической сложности** УЗ: 1) метод экспертных оценок: группе экспертов предлагают оценить сложность решения 10–20 задач, при этом учитывается уровень компетентности экспертов; 2) метод тестирования: группа учеников, включающая в себя сильных и слабых школьников, решает 10–20 задач различной сложности; дидактическая сложность УЗ тем выше, чем меньше школьников сумели ее решить. Существенным недостатком этих методов является высокая трудоемкость и затратность, так как они требуют использования большого числа экспертов или учеников. Все это позволяет утверждать, что в настоящее время отсутствует простая и эффективная методика «измерения» сложности решения учебных задач.

* * * * *

Рассмотрены различные подходы к определению понятия «учебная задача» и оценке ее сложности. Учебная задача – это конкретная проблемная ситуация, требующая разрешения и используемая в целях обучения. Перечислены факторы, влияющие на дидактическую сложность решения задачи; среди них количество и сложность элементарных операций, сложность самой сложной операции, абстрактность используемых понятий и моделей, наличие неявно заданных воздействий, влияющих на анализируемое явление, избыточность условия задачи, ее принадлежность к различным темам, необходимость проведения громоздких математических преобразований.

2. МЕТОД ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ

Одно из приоритетных направлений развития теории обучения состоит в разработке технологии оценки дидактической сложности (*ДС*) учебных задач. Сложность задачи, как и других элементов учебного материала (ЭУМ), должна соответствовать сложности знаний ученика. Чем выше сложность задачи, тем больше усилий затратит ученик на ее решение или изучение. Разрешение этой проблемы позволит расположить задачи в порядке возрастания сложности и тем самым оптимизировать учебный процесс, обеспечив соответствие *ДС* учебного материала уровню подготовки обучаемых. Ранжирование ЭУМ по степени их влияния на когнитивную нагрузку школьников или студентов поможет предотвратить умственные перегрузки, повысить мотивацию обучаемых и эффективность учебного процесса в целом.

Сложность УЗ, прежде всего, зависит от семантической сложности используемых терминов: если задача требует понимания абстрактных понятий или узкоспециальных концептов, то это может значительно затруднить ее решение. Необходимость освоения новых понятий требует дополнительных усилий и времени, увеличивая когнитивную нагрузку на ученика.

1. Сложность и трудность понятий. Как установлено в [61; 72], изучаемые в школе понятия в десятки раз различаются по сложности; чем сложнее понятие, тем ученику труднее его усвоить. Смысловая или семантическая сложность понятия *SC* (от semantic complexity) связана со сложностью отражения в сознании ученика обозначаемого им объекта, свойства или отношения [16; 33]. Она равна количеству семантической информации в слове и зависит от его вхождения в тезаурус школьника, от встречаемости с обозначаемым объектом в повседневной жизни, а также от физической сложности объекта (процесса) и его пространственно-временных масштабов [72].

Индивидуальная сложность или **трудность** *Tr* понятия *П* для конкретного ученика – величина, пропорциональная количеству времени или умственных усилий, требующихся для его узнавания, понимания и применения [7; 8]. Она сильно зависит от уровня понимания *P* учеником сущности *П*. При увеличении числа использований *N* данного понятия учеником уровень понимания увеличивается от 0 (никогда не слышал) до 1 (полное понимание). При этом трудность *Tr* уменьшается от бесконечности до некоторой величины (рис. 2.1.1), которую и следует называть семантической сложностью *SC* понятия. Эти зависимости можно промоделировать так:

$$Tr = SC / P, \quad P = 1 - \exp(-\alpha N), \quad Tr = SC / (1 - \exp(-\alpha N)).$$

Сказанное относится не только к понятиям, но и к другим ЭУМ: утверждениям, логическим рассуждениям, решениям задач, доказательствам теорем и т. д. График зависимости трудности ЭУМ от понимания изображен на рис. 2.1.2.

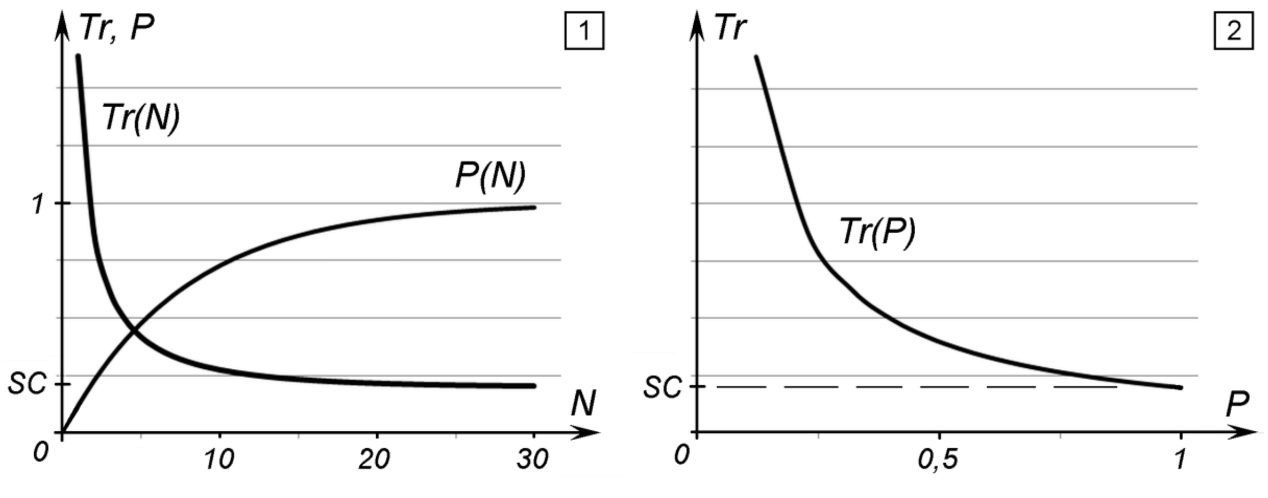


Рис. 2.1. Связь между трудностью *Tr*, уровнем понимания *P* и *N*

Изучение частотного словаря [48] позволяет установить статистическую закономерность: **чем меньше семантическая сложность слова, тем больше его частотность.** Простые слова усваиваются учеником раньше и употребляются чаще [81]. Сложные понятия употребляются реже и усваиваются в более позднем возрасте. Это наводит на мысль о том, что *SC* слова можно связать с вероятностью p_i его использования в корпусе русского языка: $SC_i \approx \ln(1/p_i) = -\ln p_i$, где i – номер слова в некотором словаре-тезаурусе. Предположим, что любые слова сочетаются друг с другом. Тогда вероятность случайного образования конкретного предложения (текста) из M слов равна $p = p_i p_j ... p_M$ (число сомножителей равно *M*). Следовательно:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_i p_j \cdots p_M}, \quad \ln\left(\frac{1}{p}\right) = \ln\frac{1}{p_i} + \ln\frac{1}{p_j} + ... + \ln\frac{1}{p_M}.$$

Получается, что $SC \approx SC_i + SC_j + ... + SC_M$, то есть сложность предложения (текста) равна сумме сложностей отдельных слов.

В рамках используемой модели вероятность употребления слова p связана с его сложностью *SC* экспоненциальной зависимостью: $p = \exp(-SC)$. Это похоже на распределение Больцмана для молекул газа (или системы отталкивающихся частиц) в однородном гравитационном поле; вероятность, что i-я молекула имеет потенциальную энергию $E_i = mgh_i$, равна $p(E_i) = A\exp(-bE_i)$. В соответствии с принципом минимума потенциальной энергии система частиц стремится перейти в состояние с $E = E_1 + E_2 + ... + E_N = \min$.

Рассмотрим некоторую предметную область, например физику. Научные понятия ведут себя подобно отталкивающимся частицам, «плавающим» в поле тяжести. Частицы, находящиеся в верхнем k-м слое, опираются на частицы из нижнего $(k-1)$-го слоя, аналогично тому, как более сложные понятия «опираются» на более простые понятия (чтобы понять определение ускорения, надо усвоить понятие скорости). В этой метафоре сила тяжести, притягивающая частицы к земле, подобна желанию ученого дать наиболее простое определение (объяснение) тому или иному понятию (явлению), то есть максимально приблизить его к нулевому уровню сложности. Это проявление **принципа экономии мышления,** аналогичного принципу минимума потенциальной энергии.

Любое сложное понятие может быть определено через 2–5 менее сложных понятий, а каждое из них – через 2–5 еще более простых понятий и т. д. В результате образуется иерархическая структура, в основе которой – самые простые понятия, опирающиеся на чувственно-наглядный опыт. Между понятиями-молекулами действуют силы отталкивания: они не могут сильно сближаться, так как бессмысленно порождать тождественные или близкие по смыслу понятия. С другой стороны, семантическое расстояние между «соседними» понятиями не может быть очень большим. При образовании нового понятия его определение не должно быть длинным, так как человек не может удержать в памяти более 7 ± 2 независимых блоков информации [16].

Будем считать, что **семантическая сложность понятия** *П* относительно тезауруса Z_0 равна суммарной сложности слов из тезауруса Z_0, которые позволяют объяснить сущность понятия *П*. **Абсолютной сложностью** слова W будем называть сложность W относительно тезауруса Z_1 первоклассника. При оценке *ДС* задач 7–11 классов удобно в качестве Z_0 выбрать тезаурус выпускника 5 класса, а сложность простых общеупотребительных слов («человек», «вода», «земля») считать равной 1 СЕД (семантической единице информации). Нам удалось последовательно оценить *ДС* сначала простых, а затем сложных понятий; этот вопрос рассмотрен в [72]. При этом применялись шкалирование [112], а также методы нечеткой квалиметрии [104], которые связаны с теорией нечетких множеств и лингвистических переменных.

Оценка сложности научных понятий производилась путем: 1) подсчета количества значимых слов в определениях; 2) парных сравнений (карточки с напечатанными на них словами раскладывались по шкале сложности); 3) группировки терминов (слова, набранные в текстовом файле, разбивались на несколько классов в зависимости от сложности их объяснения); 4) с помощью нейросети Qwen или ChatGPT. Нами установлено, что все понятия, обозначающие изучаемые в школе объекты и явления природы, могут быть уверенно разделены на 6–7 категорий $U = 1, 2, \ldots, 7$ так, что сложность терминов из 6-й категории примерно в 30–35 раз больше сложности из первой категории [72]. Это означает, что для объяснения понятия с $U = 6$ (светимость тела) требуется произнести 30–35 слов с $U = 1$ (вода). Каждому значению U соответствует семантическая сложность, вычисляемая по формуле: $S_{sem} = 2^{U-1}$; получается шкала: $S_{sem} = 1 – 2 – 4 – 8 – 16 – 32 – 64$ (СЕД).

2. Дидактическая сложность текстов и задач. Сложность учебного текста определяется его читабельностью, количеством содержащейся в нем информации и сложностью логических рассуждений [72]. Нами разработан **метод оценки сложности УЗ путем подсчета используемых понятий и учета их сложности.** Его суть состоит в следующем:

1) создают текстовый файл *Z.txt,* в котором в словесной форме закодированы условие задачи, рисунок, исходные и конечные формулы, используемые законы, правила, теоремы, а также вычисления;

2) создают файл *Slovar.txt,* в котором перечислены все используемые в задаче понятия и указаны их сложности;

3) запускают компьютерную программу, она анализирует файл *Z.txt,* выявляет термины, обращаясь к файлу *Slovar.txt,* суммирует сложности терминов и обычных слов, определяя семантическую сложность решения задачи S_{sem};

4) определив среднюю длину слов и предложений в файле *Z.txt,* вычисляют структурную сложность текста S_{str};

5) рассчитывают дидактическую сложность задачи (с решением) как произведение структурной и семантической сложностей: $DC = S_{str} S_{sem}$.

Для определения сложности текста может быть использован метод, учитывающий повторяемость терминов (понятий). Допустим, что в условии и решении задачи некоторый термин T_i со сложностью $S(T_i)$ встречается n_i раз. Рассмотрим гипотетического ученика с уровнем знаний Z_0, который читает текст. Если при первой встрече учащийся не сразу вспоминает смысл термина T_i, то при втором, третьем упоминаниях это вспоминание происходит быстрее и легче. Можно предположить, что трудность термина T_i при каждом обращении уменьшается на 30 % от предыдущего значения, но не становится меньше $0{,}1S(T_i)$, при этом всегда превышая 2. Вклад термина T_i в общую сложность текста равен $K(n_i)S(T_i)$, где

$$K(n_i)=\sum_{j=1}^{n_i} a_j,\quad a_j=\begin{cases} k^{j-1}, & \text{если} \quad k^{j-1}>0{,}1, \\ 0{,}1, & \text{если} \quad k^{j-1}\le 0{,}1, \end{cases} \qquad k=0{,}7,\quad a_j S(T_i)\ge 2.$$

Здесь n_i – номер использования термина. При $k=0{,}7$, $K(1)=1$, $K(2)=1+0{,}7$, $K(3)=1+0{,}7+0{,}7^2$ и т. д., то есть сложность каждого следующего использования термина T_i в 1/0,7 раза меньше предыдущего. Так продолжается, пока k^{j-1} не станет меньше 0,1 ($K(8)=K(7)+0{,}1$). Сложность УТ вычисляется так:

$$S_T=K(n_1)S(T_1)+K(n_2)S(T_2)+\ldots+K(n_m)S(T_m)+N_0,$$

где $S(T_i)$ – сложность i-го термина T_i, N_0 – количество обычных слов со сложностью 1 СЕД. Если $S(T_i)$ мало, то $a_j S(T_i)$ не должно быть меньше 2 СЕД.

При $k=1$ $K(n)=n$, то есть учитывается каждое использование данного термина; его вклад в сложность текста равен $nS(T_i)$. Этот случай рассмотрен раньше; получается верхняя граница сложности текста $S_{\max}$. Если $k=0$, то $K(n)=1$ (так как $0^0=1$, а $0^1=0^2=0$), то есть каждый термин учитывается только один раз. Получается нижняя граница сложности текста $S_{\min}$, равная сумме сложностей всех используемых слов, учитываемых по одному разу.

Подчеркнем, что предлагаемый подход принципиально отличается от методов оценки сложности, используемых учеными-лингвистами [15; 78; 128; 130]. Например, группа специалистов под руководством D. S. McNamara, исследуя методы измерения лингвистических характеристик текстов, выявила пять индикаторов, характеризующих сложность понимания текста: повествовательность, синтаксическая простота, конкретность слов, лексическая связность и семантическая связность [128]. Это позволило разработать автоматизированный инструмент (интернет-ресурс) Coh-Metrix. Немалый интерес представляют собой работы М. И. Солнышкиной, в которых оценивается лингвистическая сложность учебных текстов путем учета их читабельности, абстрактности, нарративности, связности и лексического многообразия [15]. Под ее руководством создан программный комплекс RuLingva, позволяющий определить сложность текста и степень его связности. Следует отметить, что рассмотренные методы предназначены для оценки сравнительно простых текстов, не содержащих таких сложных терминов, как производная, интеграл, интенсивность волны, спектральная светимость и т. д. Если применять шкалу абстрактности от 1 до 3, то оценки абстрактности понятий «скорость» и «интеграл» оказываются довольно близкими. Согласно используемому нами подходу, дидактическая сложность этих понятий, определяемая путем подсчета слов в объяснениях, отличается примерно в 10 раз. Поэтому при анализе сложных текстов следует использовать предлагаемый метод, предусматривающий выявление в них научных терминов и учет количества содержащейся в них семантической информации.

3. Применение нейросетей. Для оценки сложности понятий и учебных текстов также могут быть использованы нейросети ChatGPT, DeepSeek, Qwen и т. п. При обращении к нейросети по Интернету появляется окно запроса, куда следует ввести вопрос или задание. Например, для оценки сложности понятий соответствующий запрос может выглядеть так: *«Даны научные понятия: воздух, Солнце, атом, ..., пульсар. Разбей эти понятия на 6 категорий в зависимости от их дидактической сложности (первая категория – самые простые, шестая категория – самые сложные)».* Учитывая возможность наблюдения учеником перечисленных объектов в повседневной жизни и необходимость дополнительных знаний, абстрактных представлений об их структуре, свойствах и взаимодействиях, нейросеть классифицирует понятия по сложности. Получается так: 1) вода, корова, муха, рука, сердце, туча; 2) Земля, Луна, Солнце; 3) звезда, мозг, планета, Солнечная система; 4) атом, галактика, Вселенная, клетка, молекула, электрон, ядро атома; 5) белый карлик, ДНК, нейтрино, нейтрон, протон; 6) кварк, пульсар. Эти результаты можно использовать для оценки сложности учебных текстов.

Если текст небольшой, то нейросеть позволяет оценить его сложность непосредственно путем суммирования сложностей составляющих его терминов. Запрос к нейросети не должен превышать 5 000 символов и может выглядеть так: *«Дан текст: "Для того чтобы дать точную количественную формулировку закона электромагнитной индукции Фарадея, нужно ввести новую величину – поток вектора магнитной индукции… Магнитный поток зависит от ориентации поверхности, которую пронизывает магнитное поле". Разложи его на отдельные предложения, для каждого предложения оцени дидактическую сложность входящих в него научных терминов.*

Учти примерную классификацию:

1) (самые простые, входят в тезаурус дошкольника) гриб, животное, карандаш, книга, корова, молния, море, тарелка, облако, огонь, птица, Солнце;

2) вещество, время, желудок, компьютер, Луна, телевизор, холодильник;

3) испарение, кислота, кристалл, линза, микрофон, млекопитающее, пищеварение, ракета, сердце, телескоп;

4) Вселенная, гормон, клетка (биол.), конденсатор, магнитное поле, молекула, процессор, радиоволны, рецепторы, УФ-лучи, электрическое поле;

5) альфа-частица, атом, бактерия, вирус, галактика, индукция, коацерваты, лейкоциты, нейтрон, пропан, протон, экосистема, ядро атома;

6) (изучаются в 11 классе и университете) адрон, аллель, альдегид, античастица, бензольное кольцо, геном, глюон, гравитон, ДНК, изотоп, кварк, масс-спектрограф, орбиталь, парсек, сингулярность, спин, ядерная реакция;

7) (изучаются в университете) эффект Мессбауэра, ядерный магнитный резонанс, эффект Зеемана;

8) (самые сложные, изучаются в университете) тензор, функционал, вариация, дивергенция, ротор функции, градиент».

Нейросеть разбивает текст на отдельные предложения, в каждом из них выделяет научные понятия и относит их к той или иной категории сложности. Результат выводится на экран в виде: «1. “Для того чтобы дать точную количественную формулировку закона электромагнитной индукции Фарадея, нужно ввести новую величину – поток вектора магнитной индукции”. Термины: 1) закон электромагнитной индукции Фарадея – сложность 5; 2) поток вектора магнитной индукции – сложность 5. Сумма: 5 + 5 = 10.

2. “Вектор магнитной индукции характеризует магнитное поле в каждой точке пространства”. Термины: 1) вектор магнитной индукции – сложность 5; 2) магнитное поле – сложность 4; 3) пространство – 2. Сумма: 5 + 4 + 2 = 11...»

Соображения, представленные в этой и предыдущей главах, согласуются с унифицированной **моделью оценивания качества объекта,** предложенной А. И. Субетто в монографии [104]. Она включает в себя «субъект оценки (оценивания), объект оценки (оценивания), логику (оператор, алгоритм) оценки, базу оценки»; при этом «в оценочную систему закладываются принципы сравнения и отношения» [104]. В нашем случае субъектом оценивания является эксперт, объектом – тексты, задачи, высказывания и понятия, базой оценки – основание, по которому производится оценка, например тезаурус Z_0 или список терминов с указанием их сложности.

В завершение отметим, что для оценки сложности решения практической задачи (например, выполнения лабораторной работы) необходимо разложить соответствующую деятельность ученика на элементарные операции, оценить их сложность и просуммировать. Мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе, так как он выходит за пределы настоящей монографии.

* * * * *

Итак, сложность задачи должна соответствовать уровню знаний школьника. Чем выше сложность задачи, тем больше усилий должен затратить ученик на ее изучение. Она в первую очередь зависит от семантической сложности используемых понятий и их количества. При увеличении числа использований данного понятия учеником уровень понимания увеличивается от 0 до 1, а его трудность уменьшается от бесконечности до некоторой величины, называемой семантической сложностью. Чем она меньше, тем выше частотность употребления понятия. Простые слова усваиваются учеником раньше и употребляются чаще, а сложные – реже и усваиваются в более позднем возрасте. Предлагаемый метод оценки сложности учебных задач предусматривает подсчет используемых понятий и учет их сложности.

3. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Обучение можно представить как чередование двух процессов: 1) сообщение информации учителем; 2) выполнение учеником специально подобранных учебных заданий (решение задач, перевод текстов, написание сочинений, создание компьютерных программ и т. д.). Выступление с докладом, конспектирование лекции, просмотр учебного фильма, чтение учебника, поиск информации в Интернете также можно рассматривать как выполнение соответствующего учебного задания, заключающегося в осуществлении определенной последовательности действий. Существуют различные методы изучения процесса решения задач учащимися: 1) анализ письменных или цифровых следов решения задачи, выявление ошибок, стратегий, этапов решения; 2) экспериментальные методы, в которых измеряются время решения, точность ответа, количество попыток и т. д.; 3) метод «вслух думай»: учащийся озвучивает все свои мысли, действия и рассуждения; 4) отслеживание движений глаз: помогает понять, на какие элементы задачи учащийся обращает внимание, в каком порядке и т. д.; 5) анкетирование и интервью; 6) метод наблюдения; 7) анализ речевого взаимодействия с другими учащимися и другие.

1. Метод статистических испытаний. Одним из методов исследования дидактических процессов является метод имитационного (компьютерного) моделирования [101; 113]. При этом осуществляется абстрагирование и формализация ситуации, ученики заменяются абстрактными моделями (например, вероятностными автоматами), создается компьютерная программа, моделирующая их деятельность. Для получения статистически значимых результатов проводят серию вычислительных экспериментов, получают массив выходных данных, которые подвергаются статистической обработке. При достаточно большом количестве испытаний получающиеся значения приобретают статистическую устойчивость и могут рассматриваться как характеристики функционирования исследуемой дидактической системы «учитель – ученики». Результаты моделирования с соответствующими уточнениями могут быть распространены на реальную группу учащихся, решающих задачу.

Пусть необходимо создать несколько компьютерных моделей решения учебной задачи одним и несколькими учащимися, провести серию вычислительных экспериментов и, используя метод статистических испытаний, выявить закономерности исследуемого процесса, проанализировать получающиеся результаты.

Сущность используемого метода состоит в следующем:

1. Создают компьютерную модель исследуемой системы (то есть абстрактную модель ученика – АМУ), позволяющую получать вектор выходных сигналов (y_1, y_2, ..., y_m) при заданных векторе входных сигналов (x_1, x_2, ..., x_n) и векторе внешних воздействий (F_1, F_2, ..., F_k).

2. Автоматически выполняют серию из 10^3–10^5 испытаний компьютерной модели, в ходе которых входные сигналы и внешние воздействия изменяются как случайные величины с заданными распределениями.

3. Результаты вычислительного эксперимента обрабатывают статистическими методами и анализируют. При этом нет необходимости запоминать все входные и выходные величины, достаточно сохранить в памяти компьютера общие суммы различных исходов и количество испытаний, что поможет рассчитать вероятности того или иного исхода, средние значения величин, их среднее квадратическое отклонение и т. д. Это позволяет установить статистические характеристики исследуемой системы и закономерности ее поведения.

2. Результаты моделирования. В основе дискретно-стохастического подхода к формализации функционирования деятельности ученика лежит понятие **вероятностного автомата** – некоторого гипотетического устройства, которое при поступлении входного сигнала с заданной вероятностью переходит из одного состояния в другое и выдает соответствующий выходной сигнал [41; 55]. Ниже рассмотрено несколько ситуаций, предложены компьютерные модели, представлены результаты моделирования и проведен их анализ [65].

Ситуация 1. Ученик решает задачу из $n = 10$ элементарных действий (ЭД). Вероятность правильного выполнения каждого действия приблизительно одинакова и равна p. В случае ошибки ученик возвращается к началу задачи и все ЭД (операции) начинает выполнять сначала. Из-за утомления он совершает не более $N_П$ попыток. Как зависит вероятность P решения задачи от p?

Используется программа ПР-1 (Приложение к гл. 2). Для решения задачи ученик должен последовательно выполнить n ЭД. Чтобы промоделировать выполнение действия с вероятностью p, используют метод определения исходов по жребию: компьютер берет случайное число x из интервала [0; 1] и проверяет условие $x < p$. Если оно выполняется, то действие D_i считается успешно выполненным, счетчик выполненных действий N_D увеличивается на 1. Если $x > p$, то данная попытка решения задачи провалилась, номер попытки $n_п$ увеличивается на 1, а N_D не изменяется; компьютер снова «начинает решать задачу», выполняя первое действие, затем второе и т. д.

Если число предпринятых попыток $n_п$ достигло $N_П$, а задача не решена, то счетчик решенных задач не изменяется. Если «ученик смог решить задачу», пока $n_п$ не превысило $N_П$, то счетчик решенных задач R_Z увеличивается на 1. Используется метод статистических испытаний: компьютер моделирует многократное ($M = 10^4$) решение задачи и определяет вероятность $P=R_Z/M$, которая выводится на экран в цифровом виде.

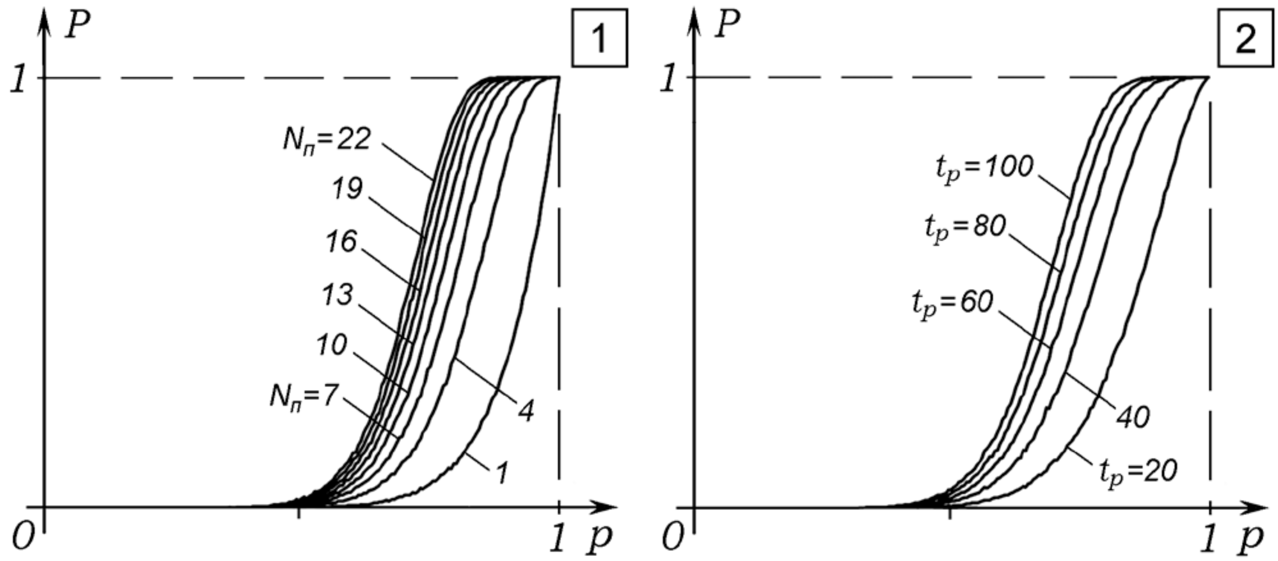


Рис. 3.1. Графики зависимостей вероятности решения задачи P от p

Для построения графика зависимости P от числа попыток $N_П$ все это повторяется в цикле при различных значения $N_П$; для каждого случая строится график (рис. 3.1.1). Видно, что: 1) график $P(p)$ похож на возрастающую логистическую (сигмазоидную) кривую, которая с увеличением p стремится к 1; 2) при увеличении числа попыток $N_П$ кривая $P(p)$ смещается влево, стремясь к некоторому предельному положению. Из графиков, в частности, следует, что при $p < 0,5$ даже большое количество попыток, предпринятых учеником, не приведет к решению задачи [65].

Ситуация 2. Ученик пытается решить задачу из $n = 10$ элементарных действий (ЭД) за ограниченное время t_p. Вероятность правильного выполнения каждого действия приблизительно одинакова и равна p, а время выполнения $t_D = 1$. В случае ошибки ученик возвращается к началу задачи и все действия начинает выполнять сначала. Как зависит вероятность P решения задачи учеником за определенное время t_p от вероятности p?

Эта ситуация моделируется с помощью той же программы 1 (Приложение к гл. 2), в которой необходимо раскомментировать операторы с t_p и закомментировать рядом стоящие операторы с $N_П$ (раскомментировать t0:=100-20*j и t>=t0, закомментировать N_popytok:=1+3*j и popytka >= N_popytok). Получающиеся графики $P(p)$ при различных значениях t_p представлены на рис. 3.1.2. Видно, что при увеличении времени, отводимого на решение задачи t_p, кривая $P(p)$ смещается влево, стремясь к некоторому предельному положению. При $p < 0{,}5$ ученик даже за большое время t_p не решит задачу.

Ситуация 3. Имеется класс из $N = 50$ учеников, уровень знаний которых подчиняется нормальному закону распределения:

$$f(Z_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(Z_i - Z_{cp})^2}{2\sigma} \right],$$

где Z_{cp} – средний уровень знаний, σ – среднее квадратическое отклонение, i – номер ученика. Учитель формулирует задачу, состоящую из $m = 20$ ЭД, сложность c_j которых убывает по экспоненциальному закону:

$$c_1,\ c_2 = c_1 \exp(-b),\ c_3 = c_1 \exp(-2b),\ \ldots,\ c_m = c_1 \exp(-(m-1)b).$$

Вероятность выполнения i-м учеником j-го действия

$$p_i = 1/[1 + \exp(-\alpha(Z_i - c_j))].$$

Необходимо определить средние значения времени T, за которые задачу решат $0{,}1N$, $0{,}5N$ и $0{,}9N$ учеников без подсказки [65].

В программе 2 (Приложение к гл. 2) задается матрица Z[i] из N элементов, показывающих знания N учеников, которые принимают случайные значения, подчиняющиеся нормальному распределению с $\sigma = 0{,}3$ и $Z_{cp} = 5$. Также создается матрица сложностей ЭД (или операций) Slogn[j]$= c_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, элементы которой уменьшаются по экспоненциальному закону. Процесс решения задачи группой учеников моделируется в цикле по времени. В каждой итерации время увеличивается с шагом 1, перебираются все N учеников и моделируется выполнение i-м учеником соответствующего j-го ЭД случайным образом. Вероятность выполнения действия p_i вычисляется, исходя из сложности операции Slogn[j] и уровня знаний i-го ученика Z[i]. Если ЭД выполнено правильно, то i-й ученик переходит к $(j + 1)$-му ЭД, который выполняется в следующий дискретный момент времени. При успешном выполнении i-м учеником всех m ЭД считается, что им задача решена. На экране рисуется график зависимости количества учеников *N’*, решивших задачу, от времени. После первой реализации этого процесса осуществляется вторая, третья и т. д.

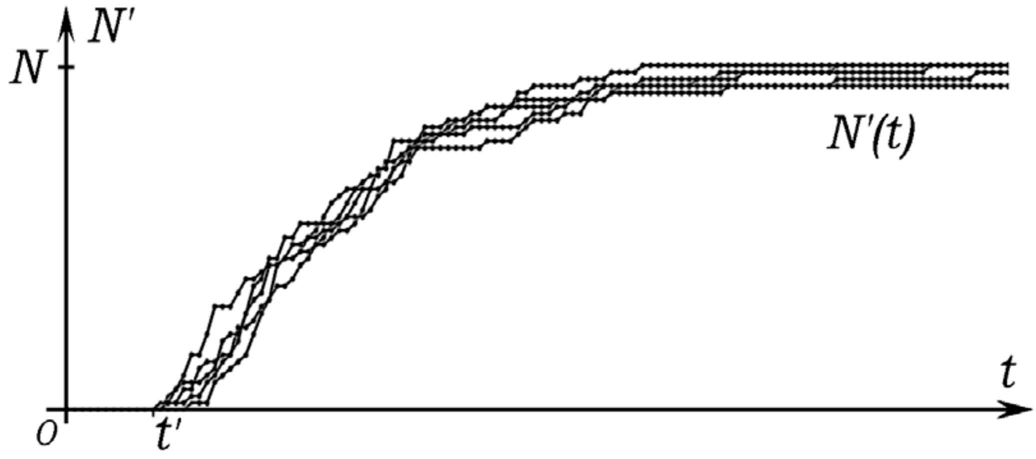


Рис. 3.2. Пять реализаций решения задачи группой учеников без подсказки

На рис. 3.2 представлены графики $N'(t)$ для 5 реализаций процесса решения 50 учениками задачи из 20 ЭД. Видно, что сначала, пока $t < t' \approx 20$ УЕВ (усл. ед. времени), $N' = 0$, а затем количество решивших задачу учеников N' увеличивается по закону, похожему на зависимость $y(t) = 1 - \exp(-at)$. На форму кривых влияют случайные факторы. В некоторых реализациях ученики с низкими Z_i долго не могут решить задачу (то есть $N' < N$). Внеся небольшие изменения в программу так, чтобы она выполняла 10^4 реализаций, удалось установить, что среднее время решения задачи: 1) 10 % учеников $T(0{,}1N) = 25{,}6$ УЕВ; 2) половиной класса $T(0{,}5N) = 39{,}3$ УЕВ; 3) 90 % учеников $T(0{,}9N) =$ $= 74{,}4$ УЕВ.

Ситуация 4. Класс из N = 25–50 учеников решает задачу, состоящую из m = 20 ЭД. Самый первый ученик, решивший задачу, в течение времени Δt оформляет ее в тетради, а затем выводит свое решение на экран (или пишет на доске). В результате подсказки уровень знаний других учеников повышается на

ΔZ. Найти время, в течение которого задачу решат: 1) 0,5N учеников; 2) 0,9N учеников. Постройте графики изменения состояния класса.

Используется компьютерная программа 3 (Приложение к гл. 2), аналогичная предыдущей. В ней осуществляется последовательное моделирование 5–50 реализаций процесса решения задачи группой учеников. Алгоритм одной реализации исследуемого процесса состоит в следующем:

1. Создать класс из $N = 50$ учеников с заданными уровнями знаний Z[i], подчиняющимися нормальному распределению.

2. Создать задачу с заданными сложностями Slogn[k] операций (их число $m = 20$), уменьшающимися по экспоненциальному закону; flag:=0.

3. Начало цикла по времени t с шагом 1.

3.1. Начало цикла по i от 1 до N (перебор всех учеников).

3.1.1. Вычислить вероятности p(i,k[i]) выполнения i-м учеником k[i]-й операции O(k[i]) (с учетом подсказки, если flag = 1);

3.1.2. Промоделировать выполнения i-м учеником O(k[i]).

3.1.3. Если i-й ученик выполнил k[i]-ю операцию O(k[i]), то k[i], увеличить на 1, а иначе k[i]:=1.

3.1.4. Если i-й ученик решил задачу (k[i]:=m), то flag:=1.

Конец цикла по i.

3.2. Сосчитать число учеников N', решивших задачу, и вывести на экран.

Конец цикла по времени t.

Модель учитывает, что если один из учеников решил задачу (переменная *flag* становится равной 1), то через время Δt он подсказывает остальным ученикам; при этом их знания увеличиваются на величину ΔZ: $Z'_i = Z_i + \Delta Z$. Допустим, в классе 50 учеников ($Z_{cp} = 5$, $\sigma = 0{,}3$), а в задаче 20 ЭД, сложность которых: 8, 6,5; 5,4; 4,4 и т. д. Из результатов моделирования следует, что в отсутствие подсказок (все ученики работают независимо) половина класса решит задачу за $T(0{,}5N)$ = 41 ± 7 УЕВ, а 90 % класса – за $T(0{,}9N)$ = 80 ± 17 УЕВ. Если ученик, решивший задачу первым, через время $\Delta t = 3$ УЕВ подскажет решение так, что $\Delta Z = 2$, то половина класса решит задачу за $T(0{,}5N)$ = 39 ± 5 УЕВ, а 90 % класса – за $T(0{,}9N)$ = 50 ± 3 УЕВ. При увеличении степени эффективности подсказки значения $T(0{,}5N)$ и $T(0{,}9N)$ уменьшаются.

Типичные графики зависимостей количества учеников, решивших задачу, от времени $N'(t)$ представлены на рис. 3.3. Первый ученик решает задачу за $t' \approx 19$ УЕВ и через время $\Delta t = 5$ УЕВ (то есть в момент $t'' \approx 24$ УЕВ) сообщает свое решение всему классу. Графики $N'(t)$ при $\Delta Z = 5$ представлены на рис. 3.3.1, а при $\Delta Z = 10$ – на рис. 3.3.2. В обоих случаях промоделировано 15 реализаций исследуемого процесса. Видно, что после подсказки количество учеников, правильно решивших задачу, резко увеличивается до величины N = 50.

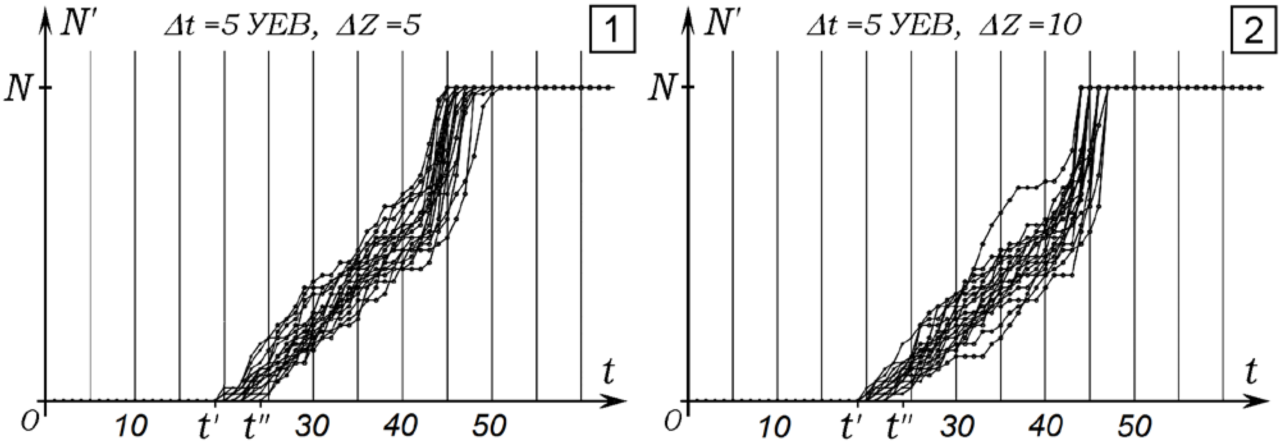


Рис. 3.3. Моделирование решения задачи группой из 50 учеников с подсказкой

Таблица 3.1. Результаты вычислительного эксперимента (Δt = 5 УЕВ)

Среднее время решения	$\Delta Z = 0$	$\Delta Z = 1$	$\Delta Z = 2$	$\Delta Z = 3$	$\Delta Z = 5$	$\Delta Z = 10$
$T(0{,}1N)$ (10 % учеников)	25,6	25,6	25,6	25,5	25,4	25,5
$T(0{,}5N)$ (50 % учеников)	39,3	39,0	39,2	39,1	38,9	39,3
$T(0{,}9N)$ (90 % учеников)	74,4	57,4	50,2	47,2	45,8	45,8

Было осуществлено моделирование при различных значениях Δt и ΔZ. Оказалось, что среднее время решения 10 % и половиной всех учеников не зависит от подсказок и остается практически неизменным (табл. 3.1). Среднее время решения задачи 90 % учеников по мере увеличения ΔZ при $\Delta t = 5$ УЕВ уменьшается от 74 до 46 (табл. 3.1). Это объясняется тем, что подсказка в первую очередь влияет на решение задачи слабыми учениками, увеличивая их шансы, а сильные ученики могут решить задачу и без подсказки. Степень эффективности подсказки характеризуется приростом знаний ΔZ у учеников, получивших подсказку.

Из этого следует, что, когда группа учеников решает задачу, учитель может так организовать работу, что ученик, первым решивший задачу, покажет свое решение на доске (если это задание на составление программы, то на экране компьютера). Это поможет остальным ученикам справиться с заданием за существенно меньшее время.

* * * * *

Таким образом, методом статистических испытаний промоделирована деятельность учащихся, решающих задачу. При этом рассмотрены следующие ситуации: 1) решение задачи учеником, делающим заданное количество попыток; 2) решение задачи учеником за ограниченный промежуток времени; 3) решение задачи группой учеников, работающих независимо; 4) решение задачи группой учеников при условии, что первый решивший ученик через небольшое время демонстрирует свое решение на доске, подсказывая остальным. Методом статистических испытаний получены графики зависимостей вероятности решения задачи от вероятности правильного выполнения элементарных действий. Для третьей и четвертой ситуаций определено время, в течение которого задачу решит половина и девять десятых класса, а также получены графики зависимостей количества учеников, решивших задачу, от времени при различной степени эффективности подсказки.

4. РАЗВИТИЕ УМЕНИЯ РЕШАТЬ ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В 7-11 КЛАССАХ: ДИНАМИКА ПРОЦЕССА

Цель изучения физики состоит не только в сообщении ученикам определенных сведений о физических фактах и законах, но и в развитии физического мышления [20; 42], сущность которого заключается в порождении физических знаний и объяснении физических явлений на основе творческого отражения и преобразования учащимися окружающего мира [50]. **Развитие физического мышления** требует анализа различных явлений природы, обсуждения наблюдений, проведения экспериментальных исследований, применения физических законов и т. д. Один из традиционных и широко используемых способов развития физического мышления состоит в решении специально подобранных задач различного уровня сложности [38]. Совокупность физических задач (ФЗ), решаемых школьником, зависит от освоенных им методов и может рассматриваться как одна из характеристик его физического мышления.

Умение решать ФЗ – важное познавательно-практическое умение, характеризующее интеллектуальный уровень развития школьника [8; 106]. При изучении новой темы происходят не только количественные изменения знаний учеников, обусловленные увеличением числа усвоенных понятий, законов, фактуальных положений, но и качественные изменения, вызванные овладением новыми методами решения задач. Они связаны с изучением неизвестных ранее законов, формул, правил и т. д. В результате отодвигается зона ближайшего развития ученика, у него формируются новые интеллектуальные способности, помогающие решить проблемы, ранее недоступные для понимания. Возникает вопрос: каковы закономерности формирования у школьника умения решать физические задачи при изучении физики в 7–11 классах по стандартной школьной программе? Для ответа на него необходимо оценить количество ФЗ, которые в принципе может понять ученик на различных этапах изучения физики.

Проанализируем процесс формирования навыка решения физических задач в школе. Для этого проведем контент-анализ школьного курса физики, выявим распределение формул и временну́ю зависимость количества ФЗ, решаемых школьником по мере изучения физики. Нами используется **методологический подход** к анализу обучения математике, физике, информатике, согласно которому учебный процесс рассматривается с точки зрения овладения учеником методами познания, позволяющими решать разнообразные задачи теоретического и практического плана. При этом применялись общетеоретические методы познания (анализ и синтез, сравнение, классификация и т. д.), а также метод контент-анализа текста, в ходе которого выявлялись изучаемые школьником формулы и время их изучения, отсчитываемое от начала изучения физики (класс и номер параграфа).

Процесс обучения приводит не только к количественным, но и к качественным изменениям системы знаний ученика, что проявляется в развитии мышления, появлении способности решать новые практические и теоретические задачи [16]. Уровень интеллектуального развития школьника может быть охарактеризован совокупностью усвоенных им методов решения всевозможных проблем (чтение, письмо, выполнение арифметических операций, построение графиков, объяснение явлений, сборка электрической цепи и т. д.). Аналогично, **степень сформированности физического мышления** зависит от: 1) способности объяснять физические явления и результаты экспериментов; 2) уровня развития экспериментальных умений (проведение опытов, выполнение измерений); 3) разнообразия различных типов ФЗ, решаемых учеником (задачи на кинематику, геометрическую оптику, атомную физику и т. д.).

Система знаний и интеллектуальных умений ученика, как и многие другие сложные системы (например, человеческая цивилизация), развивается неравномерно. Их плавная эволюция чередуется со скачкообразными переходами на более высокий уровень [11]. Когда ученик, применяя одни и те же методы, решает задачи нарастающей сложности по одной и той же теме, увеличивается прочность знаний. Процесс развития физического мышления входит в **фазу насыщения:** решение однотипных задач не приводит к развитию физического мышления, но способствует закреплению знаний. После изучения новой темы, новых теоретических моделей, понятий, законов и формул происходит **новый скачок,** связанный с изучением нового метода, позволяющего решать задачи другого типа. Аналогичные чередования эволюционной (плавной) и революционной (скачкообразной) фаз наблюдаются в развитии живых организмов, общества, науки, технологии и т. д.

Как известно, ФЗ – это ситуация, требующая от учащихся мыслительных и практических действий, применения законов и методов физики, приводящая к овладению физическими знаниями и развитию мышления [97]. Г. А. Балл ввел понятие **алгоритма решения задач** данного класса, понимая под ним модель способа решения родовой задачи, который позволяет решить любую индивидуальную задачу из этого класса [8]. Например, алгоритм решения задач по теме «Теплообмен между телами» на составление уравнения теплового баланса или алгоритм решения задач по теме «Формула тонкой линзы».

Решение ФЗ состоит из трех этапов: 1) анализ рассматриваемой ситуации, запись системы уравнений (формул), выражающих законы и определения физических величин; 2) осуществление алгебраических преобразований, решение в общем виде; 3) проведение вычислений. Как правило, второй и третий этапы требуют применения общеизвестных математических методов, которым учат в 1–5 классах: метода алгебраических преобразований и метода вычислений. Физическая часть решения задачи заключается в выполнении первого этапа.

Представим **идеального ученика,** полностью усваивающего сообщаемую ему учебную информацию. Допустим, что он занимается строго по школьным учебникам [79; 80; 89–91] (авторы: Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, Н. Н. Сотский, В. М. Чаругин; А. В. Перышкин, Е. М. Гутник), решая соответствующие ФЗ из задачника, подобного [96]. Его умение решать ФЗ развивается по мере изучения соответствующих формул и правил, представленных в учебниках физики. Изучив тему «Статика», ученик овладевает методом решения задач по статике, изучив тему «Постоянный ток», он овладевает методом расчета цепей постоянного тока. То есть **методом** будем называть способ решения задач, в которых анализируются явления, относящиеся к одной теме. Любой такой метод включает в себя составляющие (подметоды), заключающиеся в применении конкретной формулы или какой-то последовательности интеллектуальных действий (например, правила Ленца). Так, метод решения задач по геометрической оптике состоит из подметодов, предполагающих использование [79]: 1) закона отражения; 2) закона преломления; 3) формулы тонкой линзы; 4) формулы для расчета увеличения $\Gamma = H / h$; 5) способов построения хода лучей в линзе.

Пусть ученик в течение времени $[t_1; t_1']$ осваивает метод M_1, с помощью которого можно решить n_1 задач по теме T_1. Затем в течение промежутка $[t_2; t_2']$ он изучает метод M_2, позволяющий решить n_2 задач по теме T_2. Если существуют физические задачи, которые решаются при одновременном использовании методов M_1 и M_2, то ученик также может научиться их решать. Позже в течение интервала $[t_3; t_3']$ ученик осваивает метод M_3 и учится решать n_3 задач по теме T_3, а также комбинированные задачи, требующие совместного использования методов M_1, M_2, M_3. Изучение нового метода приводит к добавлению еще одной оси в **пространстве методов** (или в пространстве решаемых задач), размерность которого увеличивается на 1. Ситуация осложняется тем, что не любые два метода сочетаются друг с другом. Например, не существует школьных задач, решение которых требует одновременного применения законов динамики и волновой оптики.

Анализ учебников физики [79; 80; 89–91] показал, что школьники овладевают **методами решения задач** по: 1) кинематике; 2) динамике; 3) теме «Импульс и его сохранение»; 4) теме «Работа, энергия, мощность»; 5) статике; 6) молекулярно-кинетической теории; 7) термодинамике; 8) электростатике; 9) теме «Постоянный ток»; 10) теме «Магнитное поле»; 11) механическим колебаниям; 12) электрическим колебаниям; 13) волновому движению; 14) геометрической оптике; 15) волновой оптике; 16) частной теории относительности; 17) квантовой физике; 18) ядерным реакциям; 19) астрономии. Эти методы частично совпадают с темами школьного курса физики.

Решение ФЗ предполагает использование математических методов, применение которых часто связано с трудностями. Именно сложность математических рассуждений является фактором, ограничивающим число решаемых задач. Например, в задачах по теме «Ядерные реакции» используется формула $N(t) = N_0 2^{-t/T}$, то есть ученики должны уметь возводить число в нецелую степень и логарифмировать. Для решения ФЗ на преломление света необходимо умение вычислять синус и арксинус угла. В некоторых задачах на механические колебания требуется вычислять синус и косинус, брать производные и т. д.

Из анализа школьных задачников следует, что для решения ФЗ применяются следующие **математические методы:** 1) использование формул элементарной геометрии: $L = 2\pi R,\ S = \pi R^2,\ V = abc$ и т. д.; 2) сложение и вычитание векторов, проецирование векторных уравнений на оси координат; 3) решение системы уравнений; 4) решение квадратного уравнения; 5) применение теоремы Пифагора, теоремы косинусов, теоремы подобия и других теорем геометрии; 6) использование тригонометрических формул; 7) сложные алгебраические преобразования и вычисления со степенями, корнями, логарифмами и т. д.; 8) нахождение производных. Кроме того, при решении многих ФЗ ученик использует такие методы, как чтение, письмо, рисование, осуществление элементарных математических преобразований и вычислений. Они формируются в 1–5 классах, и нами учитываться не будут.

Каждой основной формуле из учебника физики фактически соответствует **новый подметод,** позволяющий решить некоторое множество качественных и количественных задач. Например, используя один закон Ома $I = U/R$, можно решить разные задачи на нахождение силы тока I, напряжения U, сопротивления R, отличающиеся друг от друга лишь алгебраическими преобразованиями. В дальнейшем всю совокупность задач, в которых используется лишь одна формула $I = U/R$, будем называть **обобщенной одноформульной Физиче-**

ской Задачей № 1 (1ФЗ № 1). Другая совокупность задач, решаемых с помощью одной формулы $Q = I^2Rt$, будет называться обобщенной одноформульной Физической Задачей № 2 (1ФЗ № 2). Решение некоторых задач требует совместного использования двух (трех) формул из одной темы, их обозначим через 2ФЗ (3ФЗ) и назовем обобщенными **двух- (трех-) формульными задачами.**

Некоторые задачи объединяют в себе две независимые задачи типа 1ФЗ; при этом ученик получает два ответа путем независимого применения двух формул к входным данным. Например: «Найдите импульс и кинетическую энергию тела массой 100 г, движущегося со скоростью 0,7 м/с». Эта задача не относится к 2ФЗ. Двух- или трехформульные задачи решаются путем совместного применения двух или трех подметодов (например, совместного решения двух уравнений). Пример условия задачи типа 2ФЗ: «Импульс тела массой 100 г равен 0,08 кг·м/с. Чему равна его кинетическая энергия?» Задача решается путем подстановки одной формулы в другую:

$$p = m\upsilon,\ \upsilon = p/m,\ E_K = m\upsilon^2/2 = p^2/2m.$$

В сознании ученика совокупность физических понятий, формул и решаемых задач опирается на **систему понятий** (рис. 4.1). Одно понятие может входить в несколько формул, каждой из которых соответствует одна задача типа 1ФЗ. **Двухформульные задачи** могут быть сведены к двум соответствующим одноформульным задачам, а **трехформульные** – к двум задачам 2ФЗ и 1ФЗ или к трем задачам 1ФЗ. Вместе с ними на уроках анализируются двухформульные задачи 2ФМЗ и трехформульные задачи 3ФМЗ; решение последних требует применения не только физических, но и математических формул. Кроме того, учитель решает **комплексные задачи** КФЗ, предполагающие использование различных методов (то есть знаний из различных тем). Например, рассмотрим следующую задачу: «Сколько времени необходимо, чтобы вскипятить $m = 0{,}37$ кг воды при 20 °С на электроплите с КПД 0,43, если сопротивление спирали $R = 20$ Ом, напряжение питания 220 В?» Для её решения потребуются формулы из различных тем: $Q_1 = mc\Delta T,\ U = I/R,\ Q_2 = I^2Rt,\ \eta = Q_1/Q_2$.

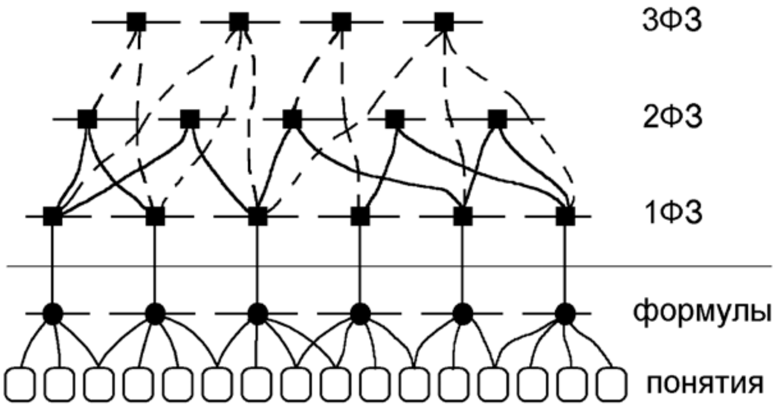


Рис. 4.1. Взаимосвязь понятий, формул и задач

В 7–9 классах учитель обучает отдельным методам, решая задачи типа 1ФЗ, 2ФЗ, 2ФМЗ, 3ФЗ и 3ФМЗ с формулами, относящимися к одной теме; задачи типа КФЗ слишком сложны, на них не хватает времени. В 10 и 11 классах после рассмотрения задач типа 2ФЗ, 2ФМЗ, 3ФЗ и 3ФМЗ по текущей теме учитель может перейти к решению комплексных задач. Если ученик освоил задачи типа 1ФЗ, 2ФЗ и 2ФМЗ, то задачи 3ФЗ, 3ФМЗ и КФЗ находятся в зоне его ближайшего развития и могут быть поняты без особого труда. Общее количество N ФЗ, решаемых идеальным учеником, характеризует его знания, а также распределение учебного материала и применяемую методику обучения. При решении **двух-, трехформульных и комплексных ФЗ** происходит изменение структуры физического мышления, школьники учатся анализировать сложные физические ситуации, выделять различные явления и из большой совокупности формул выбирать те, которые позволяют решить конкретную задачу.

С целью изучения динамики формирования у школьников умения решать ФЗ был проведен **контент-анализ** учебников физики [79; 80; 89–91]. В результате получился список формул с указанием класса и номера параграфа. Анализируя школьные задачники, удалось установить количество задач типа 1ФЗ, 2ФЗ, 2ФМЗ, 3ФЗ, 3ФМЗ, которые в принципе могут быть решены после изучения параграфа p с помощью только что изученных и предыдущих формул и правил, относящихся к соответствующей теме (табл. 4.1).

Таблица 4.1. Результаты анализа школьных учебников по физике

класс	p	ПОДМЕТОДЫ	1ФЗ	2ФЗ	2ФМЗ	3ФЗ+ 3ФМЗ	КФЗ
…	…	…	…	…	…	…	…
Метод "Решение задач по динамике" (10 класс)							
10	24	$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n$	1	0	1	0	0
10	25	$m\vec{a}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n$	1	0	2	0	2
10	26	$\vec{F}_1=-\vec{F}_2$	1	1	0	1	0
10	31	$\vec{F}=m\vec{g},\ F=GmM/r^2$	1	1	1	1	0
10	35	$F_x=-kx$	1	2	1	1	1
10	37	$F_{mp}=\mu N$	1	2	1	1	1
10	38	$F_c=k_1\upsilon,\quad F_c=k_2\upsilon^2$	1	1	1	0	0
10	…	…	…	…	…	…	…

Также определено число задач типа КФЗ, решаемых разными методами (с помощью формул из текущей и предыдущих тем). При этом учитывалось, что при изучении физики в 7–9 классах учитель решает только задачи типа 1ФЗ, 2ФЗ, 2ФМЗ, 3ФЗ и 3ФМЗ, а в 10 и 11 классах, когда математическая подготовка учеников достигла высокого уровня, учитель также рассматривает комплексные физические задачи КФЗ, относящиеся к различным темам, которые были изучены раньше.

Таблица 4.2. Количество различных типов обобщенных задач (10 класс)

параграф	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	120	121	122	123
1ФЗ	64	64	64	64	64	64	64	65	65	66	67	67	...	137	137	137	137
2ФЗ+2ФМЗ	92	92	92	92	92	92	92	92	92	94	96	96	...	196	196	196	196
3ФЗ+3ФМЗ	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	65	65	...	108	108	108	108
КФЗ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	25	25	25	25
S_1	156	156	156	156	156	156	156	157	157	160	163	163	...	333	333	333	333
S_2	220	220	220	220	220	220	220	221	221	224	228	228	...	466	466	466	466

На основе первичных таблиц типа табл. 4.1 в *Excel* были созданы таблицы, в которых перечислены номера параграфов (1 строка) и указаны количества задач типа 1ФЗ (равные числу изученных на тот момент формул), 2ФЗ и 2ФМЗ, 3ФЗ и 3ФМЗ, КФЗ, полученные суммированием с накоплением (табл. 4.2).

Нижние две строчки соответствуют общему числу S_1 задач 1ФЗ, 2ФЗ и 2ФМЗ, а также количеству S_2 всех задач 1ФЗ, 2ФЗ, 2ФМЗ, 3ФЗ, 3ФМЗ и КФЗ. Задачи типа 2ФЗ требуют использования двух физических формул (подметодов); задачи 2ФМЗ – физической и математической формул, задачи 3ФМЗ – трех формул, хотя бы одна из которых физическая, а другая – математическая.

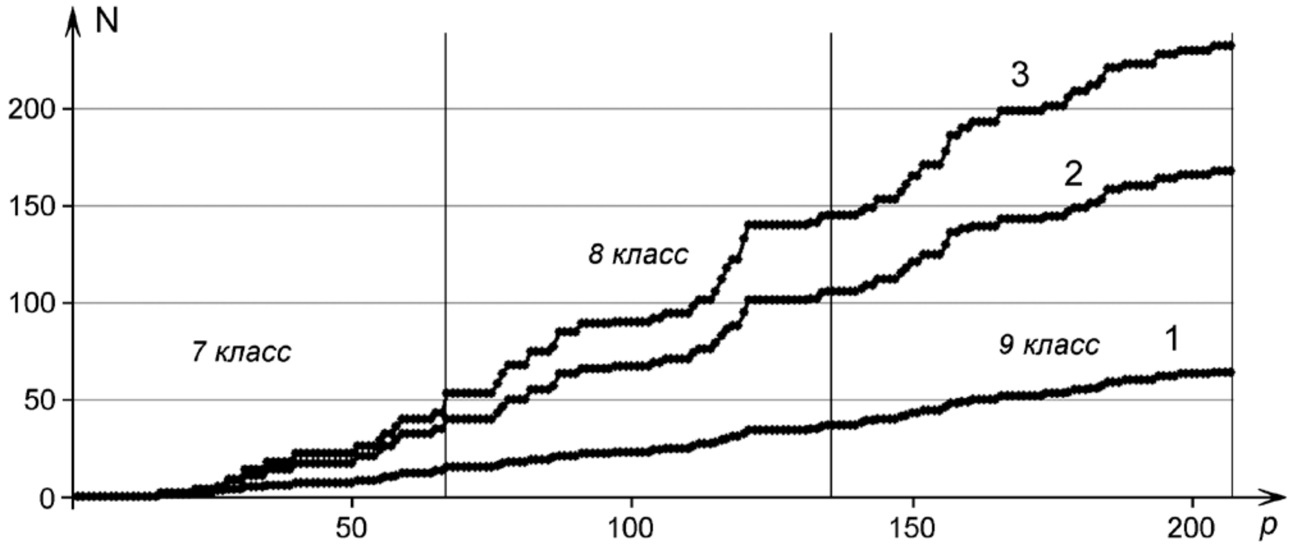


Рис. 4.2. Изменение числа решаемых задач с течением времени (7–9 кл.)

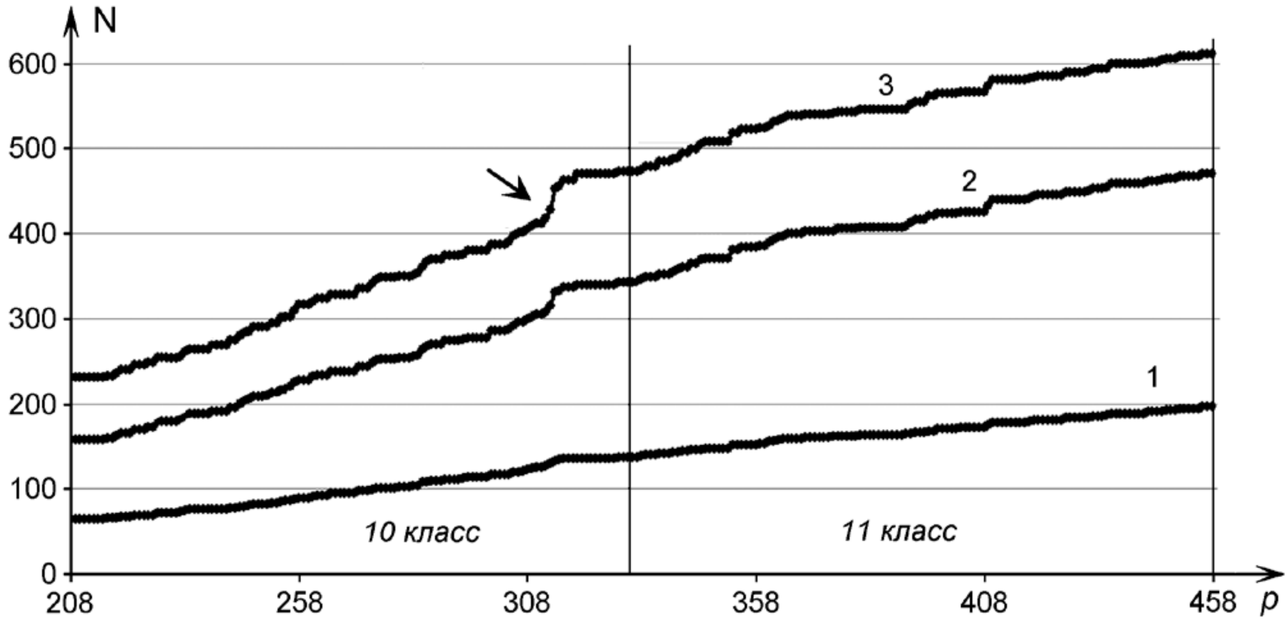


Рис. 4.3. Изменение числа решаемых задач с течением времени (10–11 кл.)

На основе полученных таблиц были построены графики, показывающие увеличение числа физических задач, которые в принципе могут быть решены и поняты в 7–9 классах (рис. 4.2) и в 10–11 классах (рис. 4.3). По горизонтали откладывается номер параграфа p, изменяющийся от 1 до 458. Кривая 1 соответствует количеству изученных формул, равному числу N_1 задач 1ФЗ. График 2 показывает, как изменяется количество задач типа 1ФЗ, 2ФЗ и 2ФМЗ, а график 3 отвечает суммарному числу задач типа 1ФЗ, 2ФЗ, 2ФМЗ, 3ФЗ, 3ФМЗ и КФЗ. Видно, что развитие умения решать ФЗ происходит неравномерно; например, в конце 10 класса при изучении темы «Постоянный ток» число задач, решаемых идеальным учеником, резко увеличивается (показано стрелкой). К концу 7 класса общее число задач 1ФЗ, 2ФЗ, 2ФМЗ, 3ФЗ и 3ФМЗ увеличивается от 0 до 53; в 8 классе оно возрастает в 2,74 раза до 145; в 9 классе возрастает в 1,6 раза, достигая 232. В 10 классе добавляются КФЗ; общее число решаемых ФЗ возрастает в 2,06 раза достигая 478; в 11 классе возрастает в 1,29 раза достигая 616. Считая, что в каждом классе учебный год длится около 9 месяцев, получаем, что среднее увеличение числа задач N в 7 классе составляет 5,89 задач/месяц, в 8 классе – 10,2 задач/месяц, в 9 классе – 9,67 задач/месяц, в 10 классе – 27,3 задач/месяц, в 11 классе – 15,3 задач/месяц.

Полученные результаты подтверждают, что по мере изучения физики в школе у учеников происходят **качественные изменения структуры мышления.** Во время обучения школьник: 1) учится на качественном уровне объяснять физические явления, используя физические понятия и законы; 2) овладевает знаниями о методах измерения физических величин; 3) изучает математические соотношения (формулы) и иные правила (например, правило левой руки), связывающие физические величины; 4) приобретает умение решать одноформульные задачи, получая числовой ответ; 6) развивает умение решать двух- и трехформульные задачи; 7) формирует умение решать комплексные задачи на применение законов из разных разделов физики, получая числовой результат. Некоторые из этих составляющих процесса формирования умения решать ФЗ происходят одновременно и параллельно друг другу.

* * * * *

Итак, анализ школьного курса физики и выявленных физических формул позволил подсчитать число типов физических задач, которые в принципе могут быть решены или поняты учеником. Были выделены следующие типы задач: 1) **одноформульные ФЗ,** для решения которых достаточно одной физической формулы (их количество равно числу изученных физических формул); 2) **двухформульные ФЗ,** решение которых предполагает совместное использование двух формул, как минимум одна из которых физическая; 3) **трехформульные ФЗ,** для решения которых требуется три формулы; 4) **комплексные задачи,** предусматривающие использование как минимум двух физических формул, относящихся к разным методам (разделам физики). Установлено, что к концу 11 класса ученик способен решить (понять) около 200 одноформульных задач, 275 двухформульных задач и 145 трехформульных и комплексных задач, в которых физические формулы сочетаются различным образом. Полученные графики характеризуют временную динамику развития умения решать задачи – важной составляющей физического мышления.

5. ЗАВИСИМОСТЬ КОЛИЧЕСТВА УСВОЕННЫХ ПОНЯТИЙ ОТ ИХ СЛОЖНОСТИ

Одно из условий эффективного обучения состоит в соответствии сложности изучаемых вопросов лингвистическим и когнитивным способностям учеников (то есть их тезаурусу и интеллектуальным навыкам). Изучаемый материал не должен быть очень сложным, иначе ученик не сможет адекватно его воспринять и усвоить; это приведет к снижению мотивации к обучению. В связи с этим определенный интерес представляет собой изучение процесса формирования тезауруса школьника с позиций сложностно-синергетического подхода, а также зависимости числа усвоенных учеником понятий от их сложности [88].

1. Сложностно-синергетический подход к обучению. Дидактическая система «учителя – ученики» относится к сложным системам с огромным количеством внутренних состояний и характеризуется большим числом следующих атрибутов (неотъемлемых признаков): 1) цели и задачи; 2) структура, то есть множество элементов и связей; 3) параметры, свойства учителей и учеников (их знания, навыки, интеллектуальные способности, черты характера); 4) ресурсы, применяемые методики и т. д. Ей присущи основные **свойства сложных систем** [5]: целостность, иерархичность, эмерджентность, множественность описания, направленность, динамичность, наличие и изменение цели обучения; наличие этапов эволюционного и революционного (скачкообразного) изменения знаний ученика, общая устойчивость системы, цикличность развития и т. д. С позиций **информационно-кибернетического подхода** дидактическая система «учителя – ученики» относится к системам управления, охваченным прямыми и обратными связями. Состояние каждого ученика можно описать большим числом переменных Z_1, Z_2, …, Z_M, отражающих уровень знаний упорядоченной совокупности элементов учебного материала.

В процессе обучения происходит развитие учеников – необратимый переход в другое, более сложное состояние, сопровождающийся постепенным превращением количественных изменений в качественные и чередованием периодов постепенного и скачкообразного усложнения знаний. Его **движущей силой** является противоречие между требованиями учителя или учебной программы и имеющимся уровнем знаний ученика по тем или иным вопросам. Причины развития разделяются на: 1) внутренние: интерес и потребности ученика, мотивация; 2) внешние: требования учителей и родителей [21; 22].

Система «учителя – ученики» (как и другие сложные системы) в процессе развития последовательно проходит **три стадии** [11; 35]: 1) **конвергенция,** то есть устойчивое эволюционное развитие системы знаний и умений ученика, ее адаптация к требованиям учителя; 2) **дивергенция,** или предскачковое состояние, в котором появляется некоторая совокупность альтернативных путей выполнения учебных заданий, возникают предпосылки для скачка на качественно более высокий уровень; 3) **критическая стадия,** в которой система переходит в качественно иное состояние, совершая скачок: ученик приобретает новые интеллектуальные навыки, осваивает новые методы решения задач, знакомится с новым подходом, концепцией или теорией. Многие сложные системы развиваются именно так: снежинки падают, снег постепенно накапливается, и в какой-то момент под влиянием внешнего фактора (звука) или без него наблюдается скачок – сход лавины.

В сознании ученика периодически происходит смена представлений, понятий и теоретических моделей [3; 18]. **Жизненный цикл** сложных понятий и представлений ученика по некоторому вопросу сводится к последовательному чередованию следующих этапов: 1) появление понятия (представления, теории) в сознании ученика; 2) его использование; 3) эволюция понятия (теории), уточнение его признаков; 4) перерождение понятия в более сложное и правильное понятие. Например, сначала у ученика зарождаются представления об атоме как о твердом массивном шарике, затем он знакомится с планетарной моделью атома Резерфорда, далее с теорией Бора и, наконец, с орбитальной моделью.

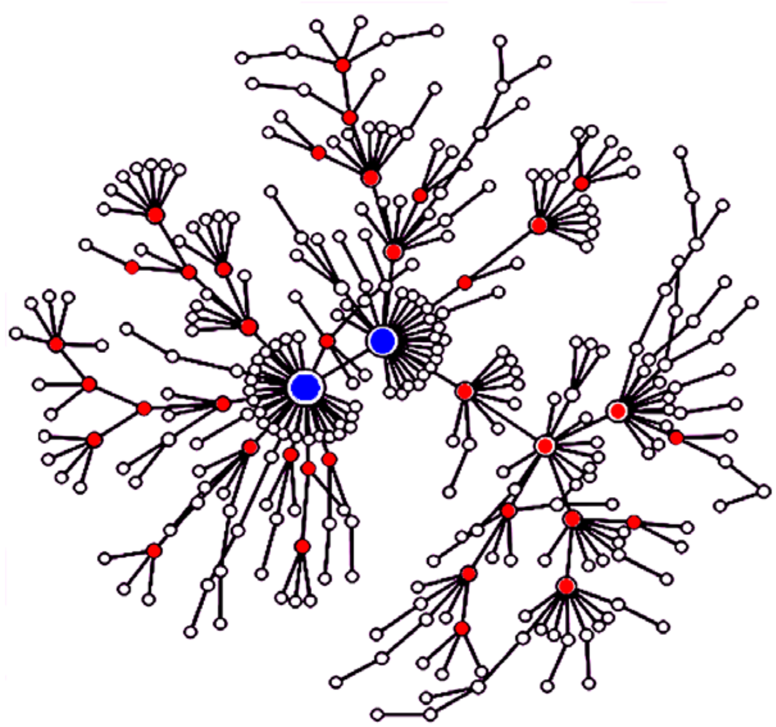


Рис. 5.1. Система понятий (слов) и связей между ними

Во время обучения используется **вербальное кодирование** информации. Ребенок в возрасте 2–6 лет, взаимодействуя с окружающим миром, знакомится с новыми объектами, их названиями и понятиями, обозначающими их свойства, связи и отношения. В его сознании одновременно формируется языковая и обыденная картины мира, сложность которых постепенно возрастает. Понятия образуют древовидные структуры, опирающиеся на результаты чувственного восприятия окружающих явлений. Подобная структура изображена на рис. 5.1, который получен с помощью модели, представленной на сайте *https://www. complexity-explorables.org.* Образующаяся система понятий и примитивных представлений может стать основой для формирования научной картины мира.

2. Семантическая сложность понятий. Формирование в сознании учеников большинства абстрактных понятий осуществляется чисто логически, то есть путем формулирования определений, решения теоретических задач, а также в результате умозрительных обсуждений различных физических экспериментов, воображаемых объектов и методов их исследования. **Семантической**

сложностью понятия $S(\Pi)$ относительно тезауруса Z_0 будем называть число простых слов (с $S=1$) из Z_0, которые следует произнести, чтобы объяснить понятие *П*. Для оценки сложности таких понятий, почти не связанных с чувственным опытом, применим **метод вычисления сложностей.** Учтем, что между понятиями существуют логические связи, а их система имеет иерархическую структуру, в которой из абстракций k-го уровня формируются определения абстракций $(k+1)$-го уровня сложности. В результате возникают цепочки взаимосвязанных понятий, например: перемещение => скорость => ускорение; сила => работа => мощность => интенсивность; заряд => электрический ток => магнитное поле => магнитная индукция => магнитный поток => электромагнитная индукция => ЭДС индукции и т. д.

Если в определении понятия *П* упоминаются понятия Π_1, Π_2, Π_3, то их назовем **образующими** понятия *П*. Можно записать: $\Pi = D(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$, где D – оператор определения (дефиниции). **Понятие *П* сложнее любого образующего его понятия:** $S(\Pi) > S(\Pi_1)$, $S(\Pi) > S(\Pi_2)$ и т. д. Для каждого понятия i-го уровня можно найти одно или два самых близких по сложности образующих его понятия $(i-1)$-го уровня. Например, для понятия «ускорение» самым сложным образующим понятием является «скорость». Тогда: S(ускорение) $\approx K \cdot S$(скорость), где K из интервала [1; 1,5]. Если понятие *П* немного сложнее самого сложного образующего понятия Π', то $K \approx 1{,}1$; если заметно сложнее, то $K \approx 1{,}3$; если значительно сложнее, то $K \approx 1{,}5$. Можно записать: S(антипротон) $\approx 1{,}1 \cdot S$(протон), S(ускорение) $\approx 1{,}3 \cdot S$(скорость), S(магнитный поток) $\approx 1{,}5 \cdot S$(магнитная индукция) [72, с. 42].

Возможен другой подход, когда к сложности образующего понятия прибавляется некоторое целое m из интервала [1; 9], например: S(ускорение) = $= S$(скорость) + m. При этом число m показывает, сколько простых слов с $S=1$ нужно добавить к понятию «скорость», чтобы дать определение ускорению. Переход на следующий уровень соответствует увеличению сложности на величину m, приблизительно равную 2–7 (например: «скорость – путь делить на время»). Это объясняется тем, что научные понятия долго эволюционировали, происходил их «естественный отбор». Из принципа экономии мышления следует, что появление нового понятия оправдывает себя в том случае, когда его определение сложнее самого сложного из образующих понятий на 2–7 слов. Например, S (ускорение) $\approx S$ (скорость) + 3.

3. Связь сложности понятий с частотой употребления. Как показывают исследования [81; 129], семантическая сложность слова связана с частотой его использования. Часто употребляемые слова обычно характеризуются невысокой сложностью, имеют более широкий диапазон значений и соответственно несут меньше информации. В [81] выявлена отрицательная корреляция между возрастом усвоения слов человеком и их частотностью; это означает, что редко встречающиеся слова в среднем усваиваются позже. **Возраст приобретения, частотность, образность** связаны между собой и определяют время извлечения слова из памяти. Как правило, ранее приобретенные слова имеют более высокую образность и частоту употребления [129].

Чем больше сложность слова, тем меньше его частота употребления. Это объясняется следующим: 1) обычно обсуждение многих проблем начинается с простых вопросов и не всегда переходит к сложным, причем уровень сложности может быть низким, средним или высоким (это зависит от целевой аудитории); 2) число специалистов по конкретной проблеме всегда меньше количества неспециалистов (включая детей), которым сложные рассуждения не понятны.

Психологи отмечают, что во время формирования языковой системы ребенка его мышление до-логическое, комплексное. Ребенок легче усваивает слова, характеризующиеся высокой наглядностью и обозначающие объекты, встречающиеся в повседневной жизни [110]. Формируются связи «образ – значение», вокруг них образуются семантические поля, возникают концепты, составляющие обыденную картину мира. Усвоенные слова активно употребляются в устной речи, то есть оказываются включенными в деятельность.

Одновременно с этим дошкольник часто слышит другие непонятные для него слова. Родители, воспитатели и учителя объясняют те понятия, которые ребенок способен понять и представить. Абстрактные термины, образованные от других абстракций, он узнает позже. Чем сложнее понятие, чем абстрактнее и дальше от обыденной картины мира, тем оно позднее усваивается членами общества и тем реже употребляется. Поэтому семантическая сложность слова может быть охарактеризована средним возрастом его усвоения или частотой использования. То же самое относится к учебным задачам и другим ЭУМ.

Введем частотную сложность слова *F*, под ней будем понимать величину $F = \ln(10^6 / f) - 3{,}318$, где f – среднее число использований слова в корпусе русского языка, приходящееся на миллион слов и определяемое по частотному словарю [48], содержащему общеупотребительные слова. В среднем, чем чаще используется то или иное слово, тем меньше его сложность. У часто используемых слов F близко к 0; у самых редких слов, встречающихся в словаре, $F = 10{,}5$. Как показано в [72], сложность научных терминов может превышать 50 и даже 100 (например, интеграл, ротор вектора и т. д.; их нет в частотном словаре). Это означает, что для объяснения некоторых понятий требуется произнести более 100 простых слов из тезауруса Z_0 пятиклассника.

Большинство слов с частотной сложностью $F \leq 7$ хорошо известны ученикам 1–4 класса; они обозначают объекты, часто встречающиеся в повседневной жизни (вода, воздух, свет, солнце), или величины, которые многократно измерялись (расстояние, площадь, объем, угол, масса). Многие из этих понятий входят в тезаурус первоклассника и являются основными, с помощью которых определяются другие, более сложные понятия [61; 72]. Они опираются на результаты чувственного восприятия объектов, поэтому для нахождения сложности нет необходимости анализировать их определения.

По мере развития ребенка наблюдается рост числа усвоенных слов, причем в первую очередь усваиваются слова с высокой частотой употребления f (низкой частотной сложностью *F*). Окружающий мир бесконечно разнообразен, научная картина мира, характеризующая наиболее существенные и изученные аспекты объективной реальности, сложна. Во время обучения происходит отражение многомерных научных знаний в сознании ученика, что приводит к развитию его языковой картины мира. Увеличение детализации отображения научной картины мира в сознании ученика связано с изучением новых объектов, сочетающих в себе различные элементарные признаки (атрибуты). Ученик, усвоивший большое количество понятий, идей и методов, из-за логических и ассоциативных связей легче приобретает новые знания. Чем больше слов ученик усвоил к концу i-го года обучения, тем больше элементарных идей и понятий, основанных на их комбинациях, он может усвоить в $(i+1)$-м году. Количество возможных комбинаций признаков объектов (а значит, и отображающих их терминов) по мере усложнения изучаемых вопросов возрастает по экспоненциальному закону. Обучение сопровождается увеличением жизненного опыта ученика, расширением словарного запаса и совокупности усвоенных идей и теорий.

4. Зависимость числа усвоенных понятий от их сложности. В процессе познания (обучения) человек открывает для себя новые объекты и их признаки, устанавливает новые факты, для обозначения которых требуются новые понятия (слова). Мозг легко схватывает простые идеи, сложные мысли понимаются с трудом: по мере увеличения сложности понятий $S = S_{sem}$ **пропускная способность «мозгового декодера»** уменьшается до нуля [72, с. 31–33].

Рассмотрим k-летнего ребенка (ученика), слушающего различных воспитателей и учителей, употребляющих слова, сложность которых изменяется в широких пределах (от 1 до 100). Вероятность того, что понятия со сложностью S принадлежат тезаурусу Z_k среднестатистического k-ученика обозначим через $P_k(S)$. В принципе она может быть определена следующим образом: 1) создается список слов со сложностью $S \pm \Delta S$ ($\Delta S << S$); 2) из генеральной совокупности k-учеников делается репрезентативная выборка; 3) путем тестирования определяется средняя доля слов из списка, которые известны этой совокупности учеников.

По мере увеличения сложности слов S вероятность их вхождения в тезаурус $P_k(S)$ убывает; соответственно уменьшается вероятность понимания учителя. «Мозговой декодер» ребенка, занимающийся семантической переработкой поступающей информации, фактически является **каналом связи** с ограниченной пропускной способностью [74, с. 125–131]. Его коэффициент передачи (вероятность понимания) $P_k(S)$ зависит от сложности S поступающих понятий, а также степени обученности ребенка b. Ученик с высокой вероятностью понимает простые термины ($P_k = 1$) и с низкой вероятностью – сложные ($P_k \to 0$). Логично предположить, что чем выше сложность термина S, тем ниже вероятность его понимания ребенком в возрасте k лет (рис. 5.2.1):

$$P_k(S) = \frac{1}{1 + \exp(a(S - b_k))}.$$

Если $S = b_k$, то $P_k(b_k) = 0{,}5$ (точка B).

График $N(S)$ на рис. 5.2.1 показывает зависимость числа слов в частотном словаре русского языка от их сложности: $N = \exp(\alpha S)$, где N – число слов, приходящихся на единичный интервал $[S;\, S+1]$. Количество слов со сложностью S, которые известны ребенку, равно: $n(S) = P(S)N(S)$. График этой функции легко построить с помощью *Excel*. Получающаяся кривая $n(S)$ возрастает (из-за особенностей словаря), а затем, достигнув максимума, убывает, стремясь к нулю (из-за неспособности мозга декодировать сложные понятия). Площадь под графиком $n(S)$ равна словарному запасу ученика.

Если по оси ординат откладывать логарифм от N, то зависимости $N(S)$ будет соответствовать возрастающая прямая (рис. 5.2.2). По мере взросления человека (роста k) происходит увеличение пропускной способности «мозгового декодера», и точка B смещается вправо: $b_1 < b_5 < b_{10}$. Зависимость

$n(S) = P(S)N(S)$ выражается графиками $n_1(S)$, $n_2(S)$ и $n_3(S)$. В любом возрасте количество усвоенных учеником слов (идей) с ростом сложности сначала возрастает, а затем убывает. Это обусловлено распределением слов в частотном словаре и зависимостью пропускной способности мозга от их сложности.

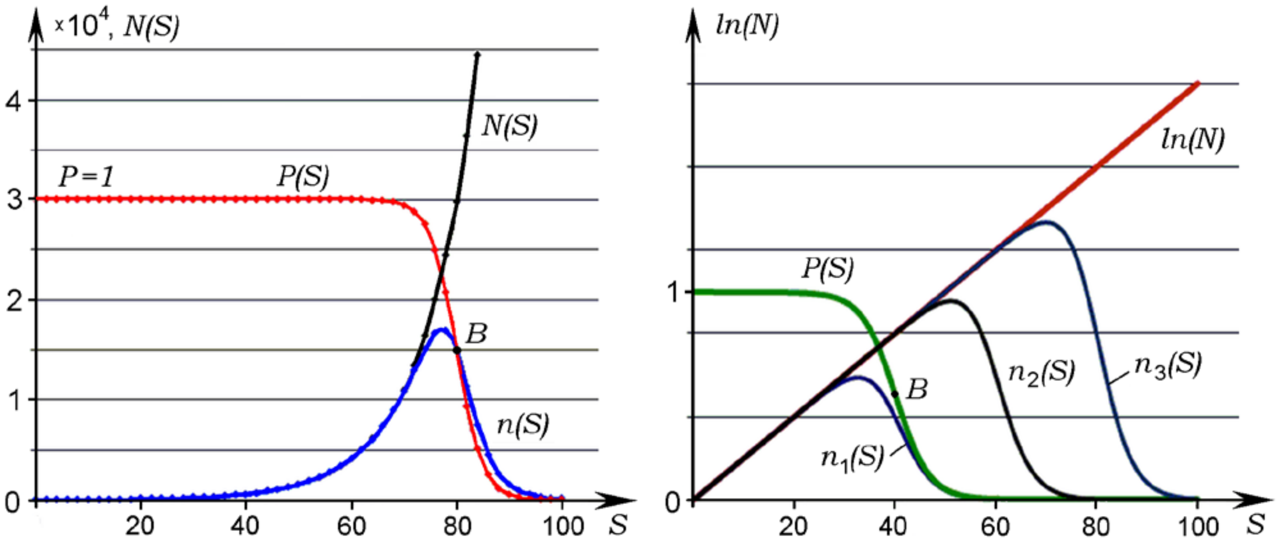


Рис. 5.2. Зависимость числа усвоенных понятий от их сложности

Полученные закономерности могут быть распространены и на решение задач различной сложности. Рассмотрим, например, сложение двух чисел в уме. Одиннадцатиклассник легко складывает однозначные числа, но количество таких задач невелико (около 50). Сложение двухзначных чисел иногда приводит к ошибкам (число задач около 400), а найти сумму трехзначных чисел сможет не каждый. Сложение многозначных чисел для многих является неразрешимой задачей. То есть с ростом сложности количество задач, решаемых учеником, сначала увеличивается, достигает максимума, а затем уменьшается. Все это относится к физическим, математическим и иным задачам, а также развитию науки и человечества в целом. Для каждого момента времени по мере увеличения сложности число существующих в науке терминов (идей, теорий) сначала возрастает, достигает максимума, а затем убывает до нуля. По мере развития науки максимум смещается в сторону большей сложности.

* * * * *

Рассмотрено применение сложностно-синергетического подхода к учебному процессу, которому присущи основные свойства сложных систем, этапы эволюционного и скачкообразного изменения знаний ученика, цикличность развития и т. д. Дано определение семантической сложности понятий, предложен метод ее вычисления путем выявления самого сложного образующего понятия и учета его сложности. Так как увеличение сложности слов сопровождается уменьшением частоты их употребления, то введена новая характеристика – **частотная сложность** слова. Математически промоделирована зависимость количества усвоенных учеником понятий от их сложности и пропускной способности «мозгового декодера». Получена зависимость числа усвоенных понятий от их сложности; ей соответствует кривая $n(S)$, которая по мере увеличения сложности сначала возрастает, достигает максимума, а затем убывает. Площадь под этим графиком равна общему числу слов, используемых учеником. В результате обучения максимум зависимости $n(S)$ сдвигается в сторону увеличения сложности.

6. СЛОЖНОСТЬ ЛОГИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЙ

Все тексты можно разделить на: 1) повествовательные, в которых излагаются факты; они имеют структуру $a_1 a_2 ... a_n$ R $b_1 b_2 ... b_m$, где a_i, b_j – имена предметов, R – отношение между ними; 2) объяснительные, в которых объясняются факты, доказываются теоремы; структура объяснительной информации: $A_1 A_2 ... A_n \to B$ (стрелка символизирует логическое следование) [107]. Решение теоретической задачи представляет собой последовательность высказываний, связанных между собой логическими связями и приводящих от условия к ответу. Очевидно, что логические рассуждения, касающиеся некоторой совокупности явлений, сложнее их описания, содержащего такое же количество слов. Поэтому оценка сложности логических рассуждений в учебных текстах и решениях задач – важная проблема дидактики.

1. Логические связи. В процессе обучения обычно используются основные логические формы мышления: понятие, суждение и умозаключение (то есть выведение нового суждения из одного или нескольких суждений). Суждение состоит из квантора («все», «некоторые»), субъекта (то, о чем говорится), связки («есть», «не есть») и предиката (то, что говорится) [9]. Умозаключения бывают индуктивные, дедуктивные и по аналогии. Рассуждением называется последовательность утверждений, логически связанных друг с другом [17]. При изучении рассуждений, например составляющих доказательство теоремы, в сознании ученика возникает логическая цепь – последовательность суждений, соединенных логическими связями.

Логическим рассуждением называют [17]: 1) продукцию на качественном уровне, то есть рассуждения типа: {Все тела состоят из частиц} и {Солнце – это тело} => {Солнце состоит из частиц}; 2) рассуждения имеющие конструкцию: «если… то…»; «так как… то…»; {факт 1}, потому что {факт 2}; 3) подстановки типа: так как $ab = c,$ $b = x/y,$ то $ax/y = c$; 4) разнообразные математические правила типа: если $ab = c,$ то $a = c/b$; если $a = \sqrt[n]{b},$ то $a^n = b$; если $\cos(a) = b,$ то $b = \arccos(a)$; если $y = \sin(ax),$ то $y' = a\cos(ax).$

При выполнении учебных заданий реализуются различные **виды логических связей:** вид – род, род – вид, вид – вид, часть – целое, причина – следствие («значит», «поэтому»), последовательность, тождественность, отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация (логическое следование), эквиваленция и т. д. Средствами связи являются: предлоги, союзы (и, или), частицы (именно, только, ведь), местоимения, прилагательные и причастия (данный, этот, указанный, названный, такой, подобный), вводные слова и словосочетания (например, во-первых, итак), слова – организаторы логических связей (поэтому, следовательно), резюмирующие слова (подведем итог, сделаем вывод) [17]. К наиболее **сложным связям** следует отнести: 1) теоремы-правила на основе конструкции «если… то…», связывающие два или более суждений; 2) логический вывод, то есть последовательность рассуждений, осуществляющих переход от некоторых предпосылок (исходных суждений) к заключениям.

Будем исходить из того, что **логическая сложность** системы рассуждений в первую очередь зависит от количества и сложности элементов (суждений) и логических связей между ними, а особенностями структуры можно пренебречь [61]. Так, например, поступают в электронике: когда хотят охарактеризовать сложность микросхемы (или электронного прибора), указывают число транзисторов (или микросхем), не уточняя, как они связаны между собой.

2. Сложность логических рассуждений. Наибольшую сложность имеют условные (импликативные) суждения «если (условие), то (заключение)» и эквивалентные суждения «если и только если (условие), то (заключение)», истинность которых доказана ранее. Это могут быть законы, теоремы, правила продукции и т. д. При этом условие может состоять из двух или более высказываний, соединенных союзами «и» или «или». Возникает вопрос: что делает логические рассуждения сложными? **Сложность логических рассуждений** зависит: 1) от когнитивной сложности связываемых суждений, то есть посылок и выводов, определяемой сложностью входящих терминов; 2) от сложности правил продукции «если… то…», «так как… то…».

Любой пятиклассник хорошо понимает значение логических конструкций «и», «или», «не», «если… то…», «так как… то…», «значит» и рассуждения типа: «если небо ясное, то дождь не пойдет», «так как зимой холодно, то река покрывается льдом», «камень падает вниз, потому что его притягивает Земля» и т. д. А теперь рассмотрим умозаключение, проводимое на уроках физики в 11 классе: «так как $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, то при увеличении индуктивности катушки в 4 раза собственная частота колебаний контура уменьшается в 2 раза». Его дидактическая сложность значительно выше, так как зависит от сложности математической формулы и понятий «частота», «индуктивность», «емкость».

Для оценки **дидактической сложности рассуждений** в тексте необходимо выбрать пороговый уровень сложности знаний U и учитывать только те логические связи, сложность которых превосходит этот уровень. Если за U принять максимальный уровень сложности рассуждений, понятный выпускнику четвертого класса, то высказывания $3 \cdot 7 = 21$, $65 > 7^2$ или «при нагревании тела расширяются» следует считать очевидными и не учитывать при определении сложности решения УЗ. Сложность исходных посылок и следствий может быть определена путем суммирования сложностей составляющих их слов. Под сложностью термина (слова) относительно тезауруса Z_0 будем понимать количество обычных слов со сложностью $S = 1$, которое надо произнести, чтобы максимально кратко объяснить данный термин ученику с тезаурусом Z_0.

Часто ЭУМ содержит последовательность расположенных друг за другом высказываний, связанных логическими связями, которые доказывают (подтверждают, обосновывают) какую-то одну идею (теорему, формулу и т. д.). Иногда ЭУМ начинается словами «Рассмотрим треугольник…», «Докажем теорему…», «Выведем формулу…» и т. д., а заканчивается формулировкой доказываемого утверждения. При этом реализуется **формально-логический способ** изложения материала. Логические рассуждения, составляющие текст, являются результатом таких интеллектуальных операций над теоретической моделью объекта познания, как обоснование вывода, выдвижение гипотезы, проведение доказательства и т. д. Иногда эти операции явно помечаются посредством соответствующих дискурсивных слов и выражений, организующих научную мысль: «значит», «следовательно», «поэтому» и т. д. Также применяются абстрактные существительные, обозначающие этапы и методы научно-познавательной деятельности: проблема, идея, гипотеза, модель, аргумент, следствие, синтез и т. п.

В. Ф. Берков и И. И. Терлюкевич отмечают, что существует два типа текстов [9, с. 127–128]: 1) **тексты-констатации,** содержащие результат ознакомления с некоторым процессом или предметом и повествующие, что с ним произошло или происходит; в них преобладают соединительные и разделительные связи (и, или), они подразделяются на тексты-описания (фиксируют фрагменты действительности в статике) и повествования (отражают развитие событий во времени); 2) **тексты-рассуждения**, содержащие условные (импликативные) связи «если... то...», математические и иные высказывания, при этом одни суждения выводятся из других, некоторые утверждения ставятся под сомнение, опровергаются или обосновываются. Доказательства теорем, решения математических и физических задач относятся к текстам-рассуждениям.

Здесь уместно использовать метафору: высказывание (словесное или математическое) аналогично засовыванию предметов в некоторую форму [72, с. 60–61]. Рассуждениям на качественном уровне (мягкая система) соответствуют мягкие предметы, засовываемые в легко деформируемую форму. В случае математических высказываний (жесткая система) предметы жесткие и имеют необычные выступы, из-за которых могут быть засунуты в форму лишь в определенной последовательности. Чтобы составить или понять такое жесткое высказывание, необходимо хорошо знать математические объекты и операции.

Степень жесткости можно охарактеризовать количеством «жестких» рассуждений типа «если… то…», «так как… то…», из «рисунка (опыта, теоремы) следует…» и т. д., приходящихся на 1 000 слов.

3. Оценка логической сложности. Перечислим факторы, увеличивающие сложность рассуждений: 1) большое количество элементарных умозаключений, арифметических или логических операций в единице объема текста; 2) большое количество слов в умозаключениях; 3) высокая когнитивная сложность используемых понятий, фактов и правил; 4) высокая строгость (жесткость) рассуждений ($2 \cdot 3$ точно равно 6, а не около 6). Так как оперативная память ученика имеет ограниченный объем (5–9 блоков), а отдельные интеллектуальные умения могут быть сформированы у него недостаточно хорошо, то некоторые умозаключения и логические операции (например, математические преобразования) представляют высокую трудность для понимания.

Предлагаемый **алгоритм оценки логической сложности** УЗ является развитием рассмотренного в [61; 63] метода и предусматривает использование специальной компьютерной программы, подсчитывающей количество терминов в тексте. Для его реализации можно: 1) выбрать уровень знаний U, относительно которого определяется сложность логических рассуждений; 2) выявить все явно используемые элементарные факты и логические правила (теоремы, законы), которые не очевидны ученику с уровнем U (например, «производная синуса x равна косинусу»); 3) расширить учебный текст (или решение задачи), дописав в него все неявно используемые факты и правила, превосходящие пороговый уровень U, а также обозначить логический вывод с помощью слов «значит», «поэтому» и т. д.; 4) обозначить и пронумеровать все используемые в логическом выводе высказывания так: B1, B2 и т. д.; 5) создать текстовый файл *Text1.txt*, включающий в себя словесную составляющую текста и вербально закодированные формулы и рисунки; 6) создать словарь-тезаурус (файл *Slovar.txt*), содержащий все научные термины, используемые в анализируемом решении задачи, то есть в файле *Text1.txt*; 7) используя шкалу сложности научных понятий и метод парных сравнений [112; 61], оценить сложность (информативность) каждого термина и записать ее в файл *Slovar.txt*; 8) с помощью компьютерной программы, обращающейся к файлу *Slovar.txt*, осуществить анализ файла *Text1.txt* и определить общую семантическую сложность решения задачи S_{sem}; 9) из текстовых файлов удалить описательно-повествовательные предложения и с помощью компьютерной программы определить сложность логических рассуждений $S_Л$; 10) вычислить долю логических рассуждений в текстах по формуле: $D_Л = S_Л / S_{sem}$, ($D_{ЛР} \leq 1$).

4. Примеры использования метода. Высокую долю логических связей имеют алгебраические преобразования и геометрические рассуждения. Проанализируем несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим умозаключение: «Так как $x = 4 / 6$, то $x = 2 / 3$». Исходная посылка: {$x = 4 / 6$} (высказывание В1). Известно правило: {если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то величина дроби останется неизменной} (В2). Из этих двух посылок вытекает следствие: {$x = 2/3$} (В3). Это умозаключение можно закодировать так: «Так как В1 и В2, то В3» или «В1 + В2 => В3». В данном случае $D_{ЛР} \approx 1$.

Пример 2. Допустим, школьник изучает решение задачи:

$$\frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x+y}.$$

Чтобы понять или выполнить эти преобразования, ученик должен вспомнить два правила: 1) формулу $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; 2) если числитель и знаменатель разделить на одно и то же число, то дробь останется неизменной. Для оценки сложности этих рассуждений нужно заменить все математические символы словами, сформулировать правила, добавить слова «следовательно», «значит», показывающие логические связи, подсчитать сумму сложностей всех терминов.

Пример 3. Имеются треугольники ABC и A'B'C'. Пусть по условию задачи {углы A и A' равны} (высказывание В1) и {углы B и B' равны} (В2). Известна теорема: {Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны} (В3). Так как {В1 и В2 и В3 = истина}, то {треугольники ABC и A'B'C' подобны}.

Для осуществления этого умозаключения ученик вынужден удерживать в своем сознании достаточно длинное предложение, состоящее из 24 слов: Так как {углы A и A' равны} и {углы B и B' равны} и {если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны}, то {треугольники ABC и A'B'C' подобны}. Объем оперативной памяти человека равен 5–9 блокам информации, поэтому для нахождения **коэффициента сложности** предложения число слов разделим на 7: $K = N_{слов}/7$. В данном случае $K = 3$. Чтобы определить среднее K для всего доказательства, следует его закодировать, полностью перечислив все посылки и следствия, сосчитать общее число слов и разделить его на количество предложений, умноженное на 7: $K = N_{слов}/7N_{предл}$. В математических выводах K может быть равно трем, пяти и даже выше.

Нами была произведена оценка сложности логических рассуждений, содержащихся в следующих заданиях [62]: 1) описать устройство и работу генератора трехфазного напряжения; 2) решить физическую задачу на радиоактивный распад; 3) доказать теорему Пифагора; 4) найти производную сложной функции $y = \cos(3x^2 + 2)$.

<u>Задание 1.</u> Объясните устройство и принцип действия генератора трехфазного напряжения.

Возможный вариант ответа выглядит так: «Генератор переменного тока состоит из неподвижной части – статора и вращающегося ротора. Ротор содержит обмотку, концы которой подключены к двум коллекторным кольцам, контактирующим с двумя щетками, установленными на статоре. На щетки подают постоянное напряжение, через обмотку ротора течет постоянный ток, который создает магнитное поле. Статор содержит три одинаковые обмотки, повернутые на 120°. При вращении ротора возникает вращающееся магнитное поле, которое индуцирует в обмотках статора трехфазную ЭДС индукции. Напряжение на обмотках статора изменяется по гармоническому закону с одинаковой частотой и амплитудой со сдвигом фаз 120°. Для увеличения магнитного потока ротор и статор изготавливают из стали, а зазор между ними делают небольшим».

На рис. 6.1 представлены наиболее важные логические связи между различными суждениями. Им соответствуют причинно-следственные связи, поэтому стрелки можно заменить словами «вызывает», «создает», «обуславливает». Обсуждая работу генератора, можно задать вопросы: 1) Почему возникает магнитное поле? – Потому что ток, текущий по обмотке ротора, создает магнитное поле. 2) Почему на обмотках статора появляется напряжение? – Потому что изменяющееся магнитное поле порождает в витках обмотки ЭДС индукции, величина которой равна скорости изменения магнитного потока: $e_{si} = -\Delta \Phi / \Delta t$. 3) Почему возникает сдвиг фаз 120°? – Потому что обмотки повернуты друг относительно друга на 120°, а вращающийся ротор создает вращающееся МП.

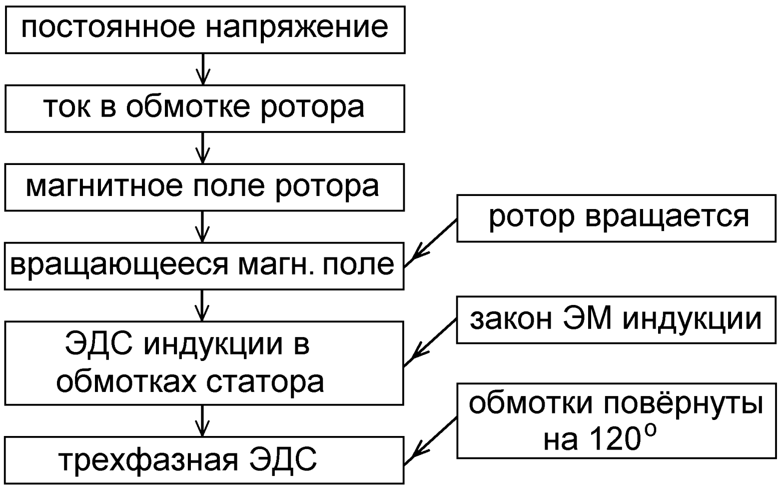


Рис. 6.1. Логические связи между суждениями

<u>Задание 2.</u> В ампулу помещен радон, активность которого $4{,}5 \cdot 10^{10}$ распадов в секунду. Через какое время t активность радона станет равна $6{,}8 \cdot 10^{9}$ распадов в секунду? Период полураспада радона 3,82 сут.

Решение: Активность $A(t)$ пропорциональна числу нераспавшихся атомов $N(t)$. Получается: $N(t) = N_0 2^{-t/T} \Rightarrow A(t) = A_0 2^{-t/T} \Rightarrow A(t)/A_0 = 2^{-t/T}$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{A(t)}{A_0} = \log_2 2^{-t/T} = -\frac{t}{T} \Rightarrow t = -T \log_2 \frac{A(t)}{A_0} = T \log_2 \frac{A_0}{A(t)}.$$

Вычислим на калькуляторе $t = 3{,}82 \log_2 \frac{4{,}5 \cdot 10^{10}}{6{,}8 \cdot 10^9} = 10{,}4$ ($сут$).

График $A(t)$ изображен на рис. 6.2.1. В решении использовались следующие математические идеи: 1) логарифмом числа a по основанию b называется число x, такое, что $b^x = a$; 2) если левую и правую части равенства разделить на одно и то же число, то равенство останется истинным; 3) если $a = b$, то $\ln(a) = \ln(b)$; 4) свойство логарифма: $\log_a(1/x) = -\log_a x$.

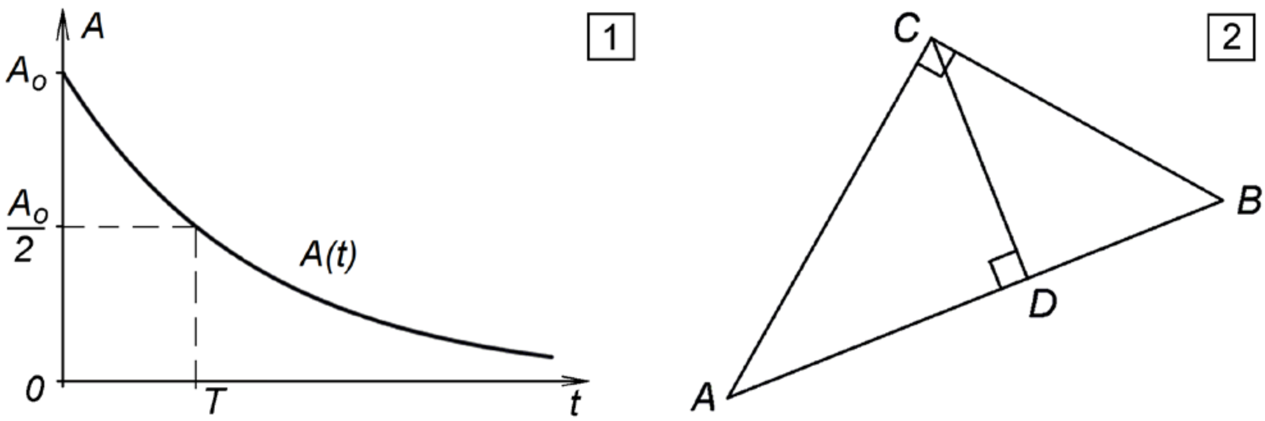


Рис. 6.2. К вопросу об оценке сложности рассуждений

Закодируем решение задачи вербальным кодом: «На рис. 6.2.1 показаны: система координат, экспонента, период полураспада, начальная активность, начальная активность делить на два. Происходит радиоактивный распад, атомы радона превращаются в атомы полония, вылетает альфа-частица. Активность прямо пропорциональна числу нераспавшихся атомов. Число нераспавшихся атомов равно число нераспавшихся атомов начальное умножить два степень минус время делить период полураспада. Активность равно активность начальное умножить два степень минус время делить период полураспада. Активность делить активность начальная равно два в степени минус время делить на период полураспада. Логарифм активность делить активность начальное равно минус время делить период полураспада. Логарифм по основанию два активность делить активность начальное равно минус время делить период полураспада. Время равно период полураспада умножить логарифм по основанию два от активность начальная делить на активность в момент времени *t*».

<u>Задание 3.</u> Рассмотрим доказательство теоремы Пифагора: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов (рис. 6.2.2): $|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2$. Схема рассуждений в закодированном виде выглядит так: «Нарисуем прямоугольный треугольник АВС, угол С – прямой, высота CD. Так как {если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны}, {угол ADC равен углу ACB} и {угол А общий}, то {треугольник АВС подобен треугольнику ADC}. Так как {если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны}, {угол BDC равен углу ACB} и {угол B общий}, значит, {треугольник АВС подобен треугольнику BCD}. Так как {треугольник ABC подобен треугольнику ADC} и {если треугольники подобны, то отношения соответствующих сторон треугольников равны}, то {AC делить AB равно AD делить AC}. Так как {AC делить AB равно AD делить AC} и {если левую и правую части равенства умножить на одно и то же число, то равенство останется истинным}, то {AC в квадрате равно AB умножить на AD}. Так как {треугольник ABC подобен треугольнику BCD} и {если треугольники подобны, то отношения соответствующих сторон треугольников равны}, то {CB делить AB равно BD делить CB}. Так как {если левую и правую части равенства умножить на одно и то же число, то равенство останется истинным} и {CB делить AB равно BD делить CB}, то {CB квадрат равно AB умножить на BD}. Так как {CB делить AB равно BD делить CB} и {CB квадрат равно AB умножить на BD}, то {AC квадрат плюс CB квадрат равно AB умножить скобки AD плюс BD}. Из

рисунка следует, что {AD плюс BD равно AB}. Так как {AC квадрат плюс CB квадрат равно AB умножить скобки AD плюс BD} и {AD плюс BD равно AB}, то {AC квадрат плюс CB квадрат равно AB квадрат}». Доказательство вместе с теоремой содержит 11 предложений из 237 слов; 16 утверждений (в некоторых предложениях они повторяются) объединены восемью логическими связями. Средний коэффициент сложности составляет K = 237 / 11 / 7 = 3,08. С помощью компьютерной программы, суммирующей сложности всех терминов, была определена семантическая сложность $S_{sem} = 435$. Дидактическая сложность доказательства *ДС* = 3,08 * 435 = 1340.

Задание 4. Найти производную сложной функции $y = \cos(3x^2 + 2)$. Решение этой задачи сводится к последовательности формул:

$$f(x) = \cos(3x^2 + 2),\ \varphi(x) = 3x^2 + 2,\ f(\varphi) = \cos(\varphi),\ f(\varphi(x))' = f_\varphi'\varphi_x',$$

$$f_\varphi' = \cos(\varphi)_\varphi' = -\sin(\varphi),\ (x^n)' = nx^{n-1},\ \varphi_x' = (3x^2 + 2)' = 6x, \text{ значит,}$$

$$(\cos(3x^2 + 2))' = -6x\sin(3x^2 + 2).$$

В закодированном виде эта последовательность рассуждений выглядит так: «Функция эф от икс равна косинус скобки три умножить икс квадрат плюс два (высказывание B1). Функция фи от икс равно три умножить на икс квадрат плюс два (B2). Если B1 и B2, то функция эф от фи равно косинус фи (B3). Производная от функции эф от функции фи по икс равно производная от функции эф по фи умножить на производную от функции фи по икс (B4). Так как производная от косинус икс равно минус синус икс и B3, то производная функции эф от фи по фи равно минус синус фи (B5). Так как B2, производная от константы равна нулю, и производная от икс в степени число равно число умножить икс в степени число минус один, то производная от функции фи по икс равно шесть умножить на икс (B6). Так как B4, B5 и B6, то производная функции эф по икс равно минус шесть умножить икс синус скобки три умножить икс квадрат плюс два».

Таблица 6.1. Результаты оценки сложности логических рассуждений

Оцениваемые ЭУМ	V	S_{sem}	$S_Л$	$D_Л$	$КСИ$
1. Генератор трехфазного напряжения	127	287	129	0,45	2,2
2. Задача на радиоактивный распад	169	499	355	0,71	3,0
3. Доказательство теоремы Пифагора	148	177	154	0,87	1,2
4. Производная сложной функции	89	383	360	0,94	4,3

Результаты оценки сложности логических рассуждений в перечисленных выше текстах представлены в табл. 6.1. Она содержит столбцы: 1) название ЭУМ; 2) объем ЭУМ V, равный общему числу значащих слов; 3) семантическая сложность ЭУМ S_{sem}; 4) общая сложность логических рассуждений $S_Л$; 5) доля логических рассуждений $D_Л = S_Л / S_{sem}$; 6) средний коэффициент свернутости информации $КСИ = S_{sem} / V$. Суммарная сложность всех терминов S_{sem} в объяснении решения задачи и сумма сложностей терминов $S_Л$ только в предложениях, содержащих логический вывод, определялись с помощью компьютерной программы.

Из таблицы видно, что ЭУМ «Производная сложной функции» имеет наибольшие значения доли логических рассуждений и плотности информации (*КСИ*), что обусловлено высокой абстрактностью математических терминов. Доля логических рассуждений в ЭУМ «Генератор трехфазного напряжения» не очень велика ($D_Л = 0{,}45$), так как он, кроме рассуждений, содержит описание устройства генератора. ЭУМ «Доказательство теоремы Пифагора» имеет низкий *КСИ*, но довольно высокий $D_Л$. Очевидно, что если проанализировать краткую биографию какого-нибудь ученого или писателя, состоящую из перечисления событий, то доля логических рассуждений $D_Л$ будет близка к нулю.

* * * * *

Часто учебные тексты содержат описательно-повествовательную и логическую составляющую; доля последней может быть определена как отношение сложности логических рассуждений к общей сложности текста. Предлагаемый метод оценки сложности логических рассуждений в учебных текстах основан на применении компьютерной программы, подсчитывающей количество терминов в тексте и учитывающей их сложности. Предварительно необходимо выявить все явно используемые элементарные факты и логические правила (теоремы, законы), которые не очевидны для ученика, и расширить текст, дописав в него все неявно используемые факты и правила. В главе 6 рассмотрены несколько примеров определения логической сложности выполнения различных учебных заданий, связанных с объяснением функционирования устройства, решением математических и физических задач, доказательством теоремы.

7. СЛОЖНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЙ В УЧЕБНЫХ ТЕКСТАХ

Необходимым условием усвоения учебного материала является его понимание, то есть овладение логикой проводимых рассуждений. При этом происходит «перекодирование» новой информации (фактов существования объектов, их свойств и отношений) и встраивание изучаемых элементов учебного материала в систему имеющихся у ученика знаний [16]. Особую трудность для понимания представляют собой математические рассуждения, требующие строгих умозаключений, проведения математических выкладок, оперирования с абстрактными понятиями [61]. Их присутствие в учебных текстах и задачах часто выступает в качестве основного препятствия для успешного усвоения выводов физических формул и физических теорий, в которых активно используется метод математического моделирования. Для эффективной работы с такими текстами ученик должен иметь определенный уровень математической грамотности, то есть уметь математически описывать изучаемый объект или процесс, правильно применять алгебраические и геометрические операции, понятия, интерпретировать и использовать результаты математического моделирования. **Сложность математических рассуждений** – важная характеристика учебной задачи, от которой зависит, в какой степени ученик сумеет понять и усвоить учебный материал [62].

Для оценки дидактической сложности ЭУМ необходимо: 1) выработать универсальный подход к определению сложности математических рассуждений, проводимых в текстах; 2) применить разработанный метод оценки математической сложности к отдельным фрагментам учебных текстов и задач по физике. Разрешение этой проблемы опирается на идеи Э. Г. Гельфмана и М. А. Холодной [16], А. Я. Вахрушевой, М. И. Солнышкиной, Р. В. Куприянова, Э. В. Гафиятовой и И. О. Климагиной [15] (проблемы школьного учебника); А. Д. Гетмановой [17], Б. И. Федорова [107] (логика рассуждений); В. И. Шалака [111], M. D. White и E. E. Marsh [132] (контент-анализ текста); И. С. Наумова и В. С. Выхованца [83], Л. О. Чернейко [110] (абстрактность текстов); P. Checkland и J. Scholes [117] (методология мягких систем).

1. Математическая сложность текста. Как уже отмечалось, все тексты можно разделить на описательные (описание ситуации в статике), повествовательные (изложение последовательности событий), убедительные и объяснительные (объяснение фактов, доказательство теорем, законов и т. д.) [107]. В учебных текстах и решениях задач описание и объяснение присутствуют в различных соотношениях. Очевидно, что наличие в тексте **математических рассуждений** существенно увеличивает его дидактическую сложность, так как ученик может усвоить учебный материал только после того, как поймет проводимые нем умозаключения [63].

Рассуждением называется последовательность логически связанных суждений и умозаключений об анализируемом объекте или процессе [17]. Математические рассуждения осуществляются с целью обоснования истинности какого-либо математического высказывания (теоремы, конечной формулы для решения задачи и т. д.). Они принципиально отличаются от умозаключений, проводимых на качественном уровне, скрупулезной точностью используемой символики, доминированием логической схемы, лаконизмом, предельной скупостью и строгостью выводов, их четкой расчлененностью, нумерацией высказываний, анализируемых ситуаций и т. д. При этом применяются понятия с фиксированным объемом, жесткие алгоритмы, четкая логика [17].

В общем случае присутствующие в тексте умозаключения предполагают наличие у реципиента (ученика) определенной совокупности знаний фактов, законов, теорем по обсуждаемому вопросу, к которым он при необходимости может обратиться. Поэтому автор учебника, проводя математические рассуждения, может указывать явно лишь некоторые наиболее неочевидные (сложные) посылки и вывод, полагая, что очевидные посылки ученику известны. Наличие «скрытых» посылок усложняет понимание текста, так как ученик должен о них догадаться. **Логическая сложность учебного текста** прямо пропорциональна: 1) семантической сложности посылок и следствий, явно или скрыто присутствующих в тексте; 2) общему количеству элементарных высказываний в математических рассуждениях.

Проблема оценки логической сложности учебного текста объективно сложна и трудно формализуема, так как в тексте реализуются всевозможные логические операции (обобщение, дизъюнкция, конъюнкция, инверсия, импликация, эквиваленция и т.п.) и процедуры (определение, объяснение, доказательство, математический вывод и т. д.). Как и любая другая «мягкая» проблема, она может быть решена различными способами, опирающимися на те или иные математические модели, логические предположения и интуитивные допущения. В основе предлагаемого **метода оценки сложности математических рассуждений** в тексте (или решении УЗ) лежат следующие идеи:

1. Текст – система, состоящая из параграфов, абзацев, предложений и слов (терминов). Это многомерный объект; его дидактическая сложность включает в себя несколько компонентов, которые должны: 1) отражать различные аспекты трудности усвоения текста; 2) не перекрываться, а взаимно дополнять друг друга; 3) учитывать, что работа с текстом предусматривает усвоение текстовой, формульной информации и проведение логических рассуждений.

2. Каждый термин из текста характеризуется семантической сложностью S^{sem}, измеряемой в СЕД или УЕИ (усл. ед. информации). Она зависит от количества слов в его определении, вхождения термина в тезаурус среднестатистического пятиклассника, частоты его использования в учебной и иной литературе и т. д. [61]. Чтобы оценить текстовую (формульную) сложность, достаточно просуммировать сложности понятий, составляющих текст (формулы).

3. Математическими будем называть умозаключения, которые в качестве посылок и/или выводов содержат: 1) простые математические высказывания

(уравнения, неравенства и т. д.); 2) сложные математические утверждения, имеющие конструкцию: «если… то…»; «так как… то…». К последнему виду высказываний относятся: 1) подстановки типа: если $a \cdot b = c$ и $b = x / y$, то $a \cdot x / y = c$ и т. д.; 2) законы, теоремы и их следствия; 3) разнообразные правила: если $a \cdot b = c$, то $a = c / b$; если $a + b = c$, то $a = c - b$; если $a^n = b$, то $a = \sqrt[n]{b}$; если $\sin(a) = b$, то $a = \arcsin(b)$; если $y = x^n$, то $y' = nx^{n-1}$ и т. д.

4. Каждый математический символ обозначает какую-то сущность – физическую константу, величину или математическую операцию. Сложность математического высказывания (формулы) пропорциональна сумме сложностей используемых величин (терминов). Сложность умозаключения складывается из сложности логической конструкции и семантической сложности терминов (символов), используемых в посылках и выводе. Весовые коэффициенты в формулах для расчета сложности текста выбираются на основе интуитивных предположений экспертов и не всегда могут быть строго обоснованы.

Представим ученика, который работает с текстом. При этом он: 1) воспринимает текстовую и графическую информацию; 2) читает формулы, представленные в тексте; 3) выполняет математические рассуждения, выводя формулы в уме или на листочке бумаги. В некоторых случаях для полного понимания всех рассуждений автора ученик должен догадаться об используемых посылках, законах, теоремах. Поэтому физический текст логично охарактеризовать: 1) **текстовой сложностью** S_T, которая складывается из семантической сложности всех понятий, используемых в тексте и рисунках; 2) **формульной сложностью** $S_Ф$, зависящей от семантической сложности физических величин, входящих в формулы, и от средней длины формул; 3) **эвристической сложностью** $S_Э$, зависящей от количества и трудности рассуждений, которые ученик должен выполнить самостоятельно, так как они не представлены в тексте. Эвристическая сложность должна учитывать [62]: 1) отсутствующие в тексте законы, теоремы, уравнения, правила и другие посылки, которые ученик должен вспомнить и применить самостоятельно, чтобы вывести конечную формулу; 2) умозаключения, проводимые учеником в уме при работе с текстом; 3) математические выкладки, производимые учеником на листочке бумаги в дополнение к присутствующим в тексте формулам.

Наибольший вклад в **эвристическую сложность** текста вносят вывод формул и доказательство теорем. Различные определения и качественные рассуждения, отражающие причинно-следственные связи между объектами, учитываются при определении текстовой сложности. Формульная сложность зависит от количества информации, содержащейся в представленных в УТ формулах. Эвристическая сложность (или эвристичность) УТ пропорциональна количеству символов в записанных на листочке формулах (не присутствующих в тексте), семантической сложности «скрытых» высказываний и числу умозаключений, которые ученик должен выполнить самостоятельно, чтобы понять текст. Таким образом, S_T, $S_Ф$, $S_Э$ дополняют друг друга.

2. Оценка сложности математических рассуждений. Для определения текстовой и формульной сложностей учебного текста можно применить метод, описанный в [60–64]. Для этого необходимо создать текстовый файл, содержащий используемые термины, названия величин, математических операций, функций, и проанализировать его с помощью специальной компьютерной программы [61], которая суммирует семантические сложности (или информативности) всех терминов и обычных слов: $S^{sem} = n_1 s_1 + n_2 s_2 + ...$, где n_i – число использований i-го термина, а s_i – его сложность, указанная в специальном файле *Slovar.txt*. Метод оценки сложности математических понятий и получающиеся результаты рассмотрены в [61; 72].

Алгебраические преобразования и геометрические рассуждения являются строгими и образуют жесткую систему, поэтому будем считать, что их сложность в 1,3 раза больше сложности качественных рассуждений. Для нахождения **формульной сложности** определяют сумму сложностей всех величин (или соответствующих понятий), входящих в формулы $S_{Ф}^{sem}$. Если формул много, то можно определить среднюю семантическую сложность, приходящуюся на один символ (сложить, умножить, корень, производная и т. д.), а затем умножить на количество символов во всех формулах. Так как человек удерживает в памяти около 7 блоков информации [16], то с длинными формулами труднее осуществлять алгебраические преобразования. Поэтому формульная сложность находится так: $S_{Ф} = 1{,}3 \cdot S_{Ф}^{sem} \cdot K_{Ф}$, где $K_{Ф} = N_{CP} / 7$ – средняя структурная сложность формул, $N_{CP} = N_{C} / N_{Ф}$ – среднее число символов в формулах. Если в тексте все формулы из 7 символов, то $S_{Ф} = 1{,}3 \cdot S_{Ф}^{sem}$.

Для оценки **эвристической сложности** текста (или решения задачи) следует: 1) разбить текст на логические блоки, в каждом из которых решается определенная задача, доказывается теорема, выводится формула; 2) в каждом блоке дополнить имеющиеся формулы недостающими утверждениями (законами, теоремами) и пропущенными или «скрытыми» математическими высказываниями (уравнениями, неравенствами), максимально упростив их; 3) сделать явными логические связи, представить посылки и выводы в виде простых высказываний; 4) оценить суммарную сложность явных и «скрытых» рассуждений в каждом блоке; 5) просуммировав эвристические сложности каждого блока, определить общую эвристическую сложность всего текста.

Итак, учебный текст – **сложный многомерный объект,** который можно охарактеризовать матрицей (S_{T}, $S_{Ф}$, $S_{Э}$). Этой матрице соответствует вектор в трехмерном пространстве, образованном осями S_{T}, $S_{Ф}$, $S_{Э}$, длина которого характеризует дидактическую сложность текста. Если формулы отсутствуют, то $S_{Ф} = 0$; если текст повествовательный или описательный (не содержит неявных рассуждений), то $S_{Э} = 0$.

Сложность умозаключения пропорциональна семантической сложности составляющих его терминов, а также общему количеству элементарных суждений (посылок и выводов) $N_{ЭС}$. Если в умозаключении одна посылка и одно следствие, то $N_{ЭС} = 2$; если три посылки и одно следствие $N_{ЭС} = 4$. Работая с некоторыми учебными текстами, содержащими эвристические лакуны, ученик вынужден сам достраивать логику рассуждений, «дописывать» недостающие, «скрытые» формулы и т. д. При определении эвристической сложности следует учесть, что $S_Э$ зависит: 1) от числа посылок и следствий $N_{ЭС}$; 2) от семантической сложности понятий S^{sem}, используемых в умозаключениях; 3) от средней структурной сложности формул $K_Ф = N_C/(7N_Ф)$; 4) от того, используются данные формулы в математических рассуждениях или нет, представлены они явно в тексте или ученик должен о них догадаться. Эвристическая сложность умозаключений в логическом блоке:

$$S_Э = 1{,}3 \cdot (S_{sem}^{скр} + S_{sem}^{явн}/7 + 3 \cdot N_{ЭС}) \cdot K_Ф,$$

где $S_{sem}^{скр}$ и $S_{sem}^{явн}$ – суммарные семантические сложности физических и иных величин, входящих в «скрытые» и «явные» формулы, определяемые с помощью компьютера, $N_{ЭС}$ – общее количество элементарных суждений (посылок и выводов), используемых в тексте. Если какая-то формула приводится в тексте без вывода и не участвует в выводе других формул, то она учитывается при нахождении $S_Ф$, а не $S_Э$. При этом считается, что когда ученик понимает вывод «в уме», глядя на текст, сложность умозаключений примерно в 7 раз меньше, чем в случае, когда он записывает «скрытые» формулы на листочке. **Показатель эвристичности** текста E вычисляется как отношение количества информации, о которой ученик должен догадаться, чтобы понять текст, к общему количеству информации в тексте: $E \approx S_Э/(S_T + S_Ф)$.

<u>Пример 1.</u> Оценим сложность рассуждений в следующем фрагменте: «*Так как масса тела* $m = \rho V$ *и объем шара* $V = 4\pi r^3/3$*, то масса шара* $m = 4\pi\rho r^3/3$». Можно задать вопрос: почему $m = 4\pi\rho r^3/3$? Ответ: потому, что $m = \rho V$ и $V = 4\pi r^3/3$. Математические рассуждения не слишком сложные, и ученик по-

нимает их «в уме» («скрытых» формул нет). Эвристическая сложность $S_Э > 0$ из-за того, что $S_{sem}^{явн} > 0$, то есть ученик все равно должен о чем-то догадаться. Текстовая сложность $S_T \approx 18$, формульная сложность $S_Ф^{sem} \approx 98$. Умозаключение содержит три формулы (высказывания), представленные явно: $N_Ф = N_{ЭС} = 3$; при этом $K_Ф \approx 1{,}29$, $S_Ф^{sem} \approx 1{,}3 \cdot 98 \cdot 1{,}29 \approx 164$, $S_Э \approx 1{,}3 \cdot (98/7 + 9) \cdot 1{,}29 \approx 39$. Поэтому этот фрагмент характеризуется матрицей (18, 164, 39). Ученику не требуется догадываться о посылках, поэтому показатель эвристичности невысок: $E = 39/(18 + 164) \approx 0{,}21$.

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим еще один фрагмент УТ из учебника физики за 11 класс: *«Обозначим через l_0 длину стержня в системе отсчета К, относительно которой стержень покоится. Тогда длина l этого стержня в системе отсчета K_1, относительно которой стержень движется со скоростью υ, определяется формулой $l = l_0\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ (1). Как видно из этой формулы, $l < l_0$ (2)»*. Ученик должен догадаться о том, что неравенство (2) следует из формулы (1) потому, что функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая, и выражение под корнем меньше 1. В данном умозаключении три посылки и один вывод, то есть $N_{ЭС} = 4$, $K_Ф \approx 1$, $S_T \approx 80$, $S_Ф \approx 1{,}3 \cdot 78 \approx 101$, $S_Э \approx 1{,}3 \cdot (79 + 78/7 + 3 \cdot 4) \cdot 1 \approx 133$. Рассматриваемый фрагмент характеризуется матрицей (80, 101, 133), его показатель эвристичности $E \approx 133/(80 + 101) \approx 0{,}73$.

<u>Пример 3.</u> Проанализируем элементарную теорию атома водорода, предложенную Бором, в которой выводится обобщенная формула Бальмера (по учебнику физики для 11 класса с углубленным изучением предмета, авторы А. Т. Глазунов, О. Ф. Кабардин, А. Н. Малинин, В. А. Орлов, А. А. Пинский, 1994 г.). Математические рассуждения начинаются с формул:

$$a = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r^2}, \quad \text{откуда} \quad \upsilon^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r},$$

где m – масса электрона.

Для их вывода ученик должен догадаться и выполнить следующие пять умозаключений: 1) так как $F = ma$ и $a = \upsilon^2 / r$, от $F = m\upsilon^2 / r$ (1); 2) так как $F = kq_1q_2 / r^2$ и $k = 1/(4\pi\,\varepsilon_0)$, то $F = q_1q_2 /(4\pi\,\varepsilon_0 r^2)$ (2); 3) так как заряды протона (ядра атома водорода) и электрона по модулю равны ($q_1 = q_2 = e$) и (2), то $F = e^2 /(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ (3); 4) так как (1) и (3), то $m\upsilon^2 / r = e^2 /(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ (4); 5) так как {если левую и правую части равенства умножить или разделить на одно и то же число, то равенство останется истинным} и (4), то $\upsilon^2 = e^2 /(4\pi\varepsilon_0 mr)$ (5).

Затем записывают выражения для потенциальной, кинетической и полной энергий электрона. Вывод заканчивается формулой для частоты кванта, излучаемого атомом при переходе с m-го уровня на n-й энергетический уровень:

$$\nu_{mn} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Подсчитав количество символов, можно определить сложность явных и «скрытых» формул в этих рассуждениях. Общая текстовая сложность рассматриваемого вывода $S_T \approx 1430 + 2 \cdot 65 = 1560$ (учтено, что сложность каждого из 65 «обычных» слов в данном тексте равна 2), формульная сложность $S_Ф \approx 3480$. Средняя информативность математических символов (включая «равно», «умножить», «сложить» и т. д.) 390 / 67 = 5,8; это позволяет найти $S_{явн}^{sem} \approx 1380$, $S_{скр}^{sem} \approx 899$. Фрагмент содержит $N_Ф = 29$ «явных» и «скрытых» формул, их средняя структурная сложность $K_Ф \approx 1{,}94$. Эвристическая сложность текста

$$S_Э \approx 1{,}3 \cdot (899 + 1380 / 7 + 3 \cdot 29) \cdot 1{,}94 \approx 2984.$$

Этот фрагмент текста характеризуется матрицей (1560, 3480, 2984), его показатель эвристичности $E \approx 2984 /(1560 + 3480) \approx 0{,}59$ достаточно высок.

* * * * *

Предлагаемый метод оценки сложности математических рассуждений в различных учебных текстах основан на определении количества математических высказываний (или других элементарных суждений) в проводимых умозаключениях и учете суммарной семантической сложности терминов, обозначающих входящие в формулы величины. Для этого используется компьютерная программа, анализирующая текст. Она обращается к словарю-тезаурусу – специальному файлу, содержащему список терминов с указанием их семантической сложности. При этом учитываются объемная сложность формул, число элементарных предложений (уравнений) в математических рассуждениях, а также то, что некоторые посылки (формулы) отсутствуют в тексте (или решении задачи), и о них ученик вынужден догадываться самостоятельно. Все это позволяет вычислить эвристическую сложность текста, зависящую от количества и сложности математических рассуждений, которые должен выполнить школьник, чтобы понять текст. Также введено понятие показателя эвристичности, равного доле «скрытой» учебной информации, которую ученик вспоминает сам. Рассмотрены примеры использования предлагаемого метода для анализа нескольких текстовых фрагментов по физике.

8. ДИДАКТИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Как известно, цель изучения математики состоит не только в сообщении ученикам определенной суммы математических знаний, но и в развитии математического мышления. Последнее достигается путем решения специально подобранных задач различного уровня сложности, решаемых в огромном количестве (несколько сотен в год). Совокупность наиболее сложных математических задач (МЗ) по различным темам, решение которых в принципе может понять ученик, зависит от освоенных им методов и характеризует уровень развития его математического мышления. Поэтому немалый практический интерес представляет собой **проблема оценки дидактической сложности математической задачи,** а также определения вклада того или иного метода решения в общую оценку *ДС* задачи. Дидактическая сложность многих физических задач также зависит от сложности применяемых математических методов.

Проблемой определения сложности учебных задач занимались А. В. Гидлевский [19], О. Б. Епишева и В. И. Крупич [27], Л. В. Жук [28], В. М. Кротов [40], И. Л. Лернер [46], О. Э. Наймушина и Б. Е. Стариченко [82], И. С. Наумов и В. С. Выхованец [83], А. Л. Сакович [97] и другие исследователи. При этом к основным составляющим сложности были отнесены [19; 82; 97]: число и сложность элементов, отношений, логических операций, формул; степень абстрактности используемых понятий и моделей; избыточность условия задачи; ее принадлежность к различным темам; необходимость громоздких алгебраических преобразований и т. д.

Так как при обсуждении решения задач используется **вербальное мышление,** то при оценке сложности МЗ имеет смысл учитывать семантическую сложность встречающихся понятий-маркеров и количество их упоминаний [61].

Для дальнейшего решения обозначенной проблемы необходимо: 1) выявить основные составляющие дидактической сложности математической задачи; 2) разработать методику их оценки, основанную на учете сложности используемых терминов; 3) на конкретных примерах показать ее эффективность.

Общий **уровень развития теоретического и практического мышления** характеризуется количеством всех методов решения всевозможных проблем, которыми овладел ученик (перевод текста, написание реферата, измерение силы тока, создание компьютерной программы и т. д.). **Степень сформированности математического мышления** зависит от разнообразия различных типов МЗ, решаемых учеником (вычисления, алгебраические преобразования, доказательство теорем, нахождение корней уравнения и т. д.).

Система знаний и интеллектуальных умений ученика, как и многие другие сложные системы (наука, общество, человеческая цивилизация и т. д.), развивается неравномерно, ее сложность увеличивается скачкообразно. Происходит **чередование плавной эволюции** системы знаний (ученик, используя одни и те же методы, решает задачи нарастающей сложности, увеличивается прочность знаний) и **качественных переходов** на более высокий уровень (ученик изучает новый метод, позволяющий решить УЗ другого типа). Если решается много однотипных задач, то процесс развития математического мышления входит в **фазу насыщения:** решение УЗ того же типа не приводит к существенному развитию математического мышления, но способствует закреплению знаний. Затем происходит новый скачок, связанный с изучением нового метода, и т. д. Подобное чередование скачкообразного и плавного развития наблюдается в развитии живых организмов, общества, науки, технологии, искусства и т. д.

При решении МЗ в школе и вузе обычно применяют следующие методы: M_1 – метод чтения текста; M_2 – метод арифметических вычислений (маркеры: числа и символы « = », « + », « – », « * », « / », x^2, x^3 и т. д.); M_3 – метод алгебраических преобразований (маркеры: переменные и символы « = », « + », « – », « * », « / », «^2», «^3»); M_4 – метод геометрических рассуждений и операций с векторами (маркеры: отрезок, окружность, вектор, проекция, скалярное произведение и т. д.); M_5 – метод применения формул комбинаторики (сочетание, перестановка и т. д.); M_6 – метод использования тригонометрических формул (синус, косинус, арктангенс и т. д.); M_7 – метод использования логарифмов и экспоненциальных функций (экспонента, логарифм, степень, кроме x^2 и x^3); M_8 – метод дифференцирования и интегрирования (предел, производная, вторая производная, интеграл и т. д.); M_9 – операторный метод (градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа и т. д.) [64].

Допустим ученик сначала осваивает метод M_1 и учится решать ≈ 10 задач $МЗ_1$, требующих его применения [64]. Затем он изучает метод M_2 и учится решать ≈ 10 задач $МЗ_2$. При этом он может понять порядка 100 комбинированных задач $МЗ_{12}$, которые требуют использования методов M_1 и M_2. Им соответствуют точки, лежащие в плоскости M_1OM_2 (рис. 8.1). Потом он осваивает метод М3 и учится решать ≈ 10 задач $МЗ_3$; общее число решаемых задач составляет уже порядка 1 000. При изучении каждого нового метода добавляется еще одна ось в пространстве методов (или в пространстве решаемых задач), его размерность увеличивается на единицу.

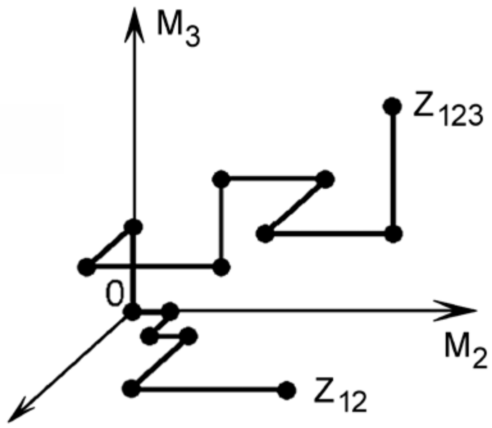


Рис. 8.1. Траектория решения задачи в пространстве методов

Часто процесс решения задачи состоит из нескольких этапов; ему соответствует движение точки в многомерном **пространстве методов** $OM_1M_2 \ldots M_n$. Сложность применения того или иного метода зависит от решаемой МЗ; она может быть приблизительно определена путем подсчета соответствующих маркеров и учета их *ДС*. Когда ученик первый раз применяет метод M_1, точка начинает двигаться из О и смещается в направлении оси OM_1 на некоторое расстояние S_1', пропорциональное сложности проводимых рассуждений. Затем ученик применяет метод M_2, точка смещается на расстояние S_2' в направлении оси OM_2, потом снова метод M_1 – точка смещается на S_1'' параллельно OM_1 и т. д. Когда ученик последовательно и многократно применяет три метода M_1, M_2 и M_3, точка, символизирующая решение задачи, смещается по некоторой ломаной в трехмерном пространстве $OM_1M_2M_3$. Если ограничиться девятью перечисленными выше методами, то решение любой задачи можно рассмотреть как перемещение точки в девятимерном пространстве $OM_1M_2 \ldots M_9$. Радиус-вектор $O\vec{A} = \vec{S} = (S_1, S_2, ..., S_9)$ последней точки А, соответствующей концу решения задачи, характеризует ее дидактическую сложность. Его компоненты (проекции на оси координат) показывают сложности $S_1, S_2, ..., S_9$ применения соответствующих методов, причем $S_k = S_k' + S_k'' + S_k'''...$, $k = 1...9$. Они определяются путем подсчета терминов-маркеров, встречающихся в условии и решении задачи, и учета их сложности.

Применяемый подход опирается на следующие идеи:

1) для оценки *ДС* задачи необходимо создать текстовый файл *Z.txt*, в котором закодированы ее условие и решение; сложность МЗ зависит от его объема (количества слов) и степени абстрактности используемых терминов;

2) *ДС* конкретной задачи определяется сложностью S_k методов M_k ($k = 1, 2, \ldots, 9$), которыми должен владеть ученик, чтобы ее решить;

3) сложность использования метода M_k при решении данной математической задачи характеризуется количеством соответствующих терминов-маркеров, входящих в *Z.txt*, и их сложностью;

4) путем подсчета значимых слов в определении и методом парного сравнения можно оценить дидактическую сложность каждого термина-маркера;

5) с помощью компьютерной программы, анализирующей условие и решение оцениваемой задачи, можно сосчитать суммарную сложность маркеров $S_k = S_k' + S_k'' + S_k'''...$, относящихся к каждому методу M_k.

Сложность термина Т относительно тезауруса Z_0 равна суммарной сложности слов из тезауруса Z_0, которые позволяют объяснить сущность термина Т. Удобно в качестве Z_0 выбрать тезаурус выпускника пятого класса, а сложность простых общеупотребительных слов считать равной 1. После оценки **дидактической сложности математических терминов** получены следующие результаты [72]: переменная – 2, отрезок – 2, вектор – 4, проекция вектора – 6, синус – 6, тангенс – 7, экспонента – 13, скалярное произведение – 25, логарифм – 27, предел – 32, производная – 65, градиент – 75, интеграл – 86, циркуляция – 93, дивергенция – 154 и т. д.

Для оценки **семантической сложности задач** нами использовался метод, учитывающий повторяемость терминов (гл. 2). Считается, что при каждом следующем употреблении термина его трудность уменьшается на 30 % от предыдущего значения, но не становится меньше $0{,}1S(T_i)$, при этом всегда превышая 2. Вклад термина T_i в общую сложность текста равен $K(n_i)S(T_i)$, где n_i – номер использования T_i. Получается, что $K(1) = 1$, $K(2) = 1 + 0{,}7$, $K(3) = 1 + 0{,}7 + 0{,}7^2$ и т. д., то есть сложность каждого следующего использования термина T_i в 1/0,7 раза меньше предыдущего.

С целью нахождения перечисленных выше девяти составляющих сложности решения задачи необходимо: 1) представить условие задачи и ее решение в текстовом виде, закодировав переменные x и y словами «переменная», числа словами «число» и т. д.; 2) с помощью компьютерной программы проанализировать получившийся файл *Z.txt*, подсчитав количество использований различных терминов-маркеров, относящихся к методам M_1, M_2, …, M_9 с учетом их сложности; 3) записать матрицу сложности в виде $(S_1, S_2, ..., S_9)$, вычислить общую дидактическую сложность задачи. Для этого могут быть использованы два способа: 1) дидактическая сложность как результат суммирования сложностей S_k ($k = 1$, 2, …, 8): $ДС_1 = S_1 + S_2 + ... + S_9$; 2) если сложности S_k считать друг от друга независимыми, то: $ДС_2 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + ... + S_9^2}$.

В качестве примера рассмотрим условие и решение задачи 4 (см. ниже), которое в закодированном виде может быть представлено так: «решите уравнение: логарифм перемен = число * логарифм число плюс число * логарифм число. Учтем, что перемен * логарифм перемен = логарифм перемен степень перемен, логарифм перемен + логарифм перемен = логарифм перемен * перемен. Логарифм перемен = логарифм число^2 + логарифм число степень = логарифм число + логарифм число = логарифм число * число. Перемен = число». Компьютерная программа, написанная на языке *ABCPascal*, анализируя этот файл, подсчитывает слова-маркеры (или заменяющие их символы « + », « * », « = », « ^2 », «ln», «arctg» и т. д.), относящиеся к тому или иному методу M_k.

С целью апробации описанного метода была осуществлена оценка перечисленных выше компонентов дидактической сложности S_k для 9 задач из различных разделов математики, решения которых представлены ниже [64]. При этом использовалась программа ПР-4 из Приложения к главе 8.

<u>Задача 1.</u> Решите уравнение: $12x + 4 = 100$.

Решение. Если левую и правую части истинного равенства уменьшить на одну и ту же величину (или в одно и то же количество раз), то равенство останется истинным: $12x = 96$, $x = 96/12 = 8$.

<u>Задача 2.</u> Решите уравнение: $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

Решение. Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$. Корни уравнения:

$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/(2 \cdot a)$. $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$, $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$, $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = -2$.

Задача 3. Упростите выражение: $f(\alpha) = \cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

Решение. Учтем, что $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Получаем:

$$f(\alpha) = \cos^2\alpha + (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

Задача 4. Решите уравнение: $\log_4 x = 2\log_4 10 + (3/4)\log_4 81$.

Решение. Учтем, что $a\log_b c = \log_b c^a$ и $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$.

$\log_4 x = \log_4 10^2 + \log_4 81^{3/4} = \log_4 100 + \log_4 27 = \log(27 \cdot 100)$, $x = 2700$.

Задача 5. Вычислите: $I = \int\limits_0^1 e^{2x} dx$.

Решение. Учтем, что $(e^{ax})' = ae^{ax}$. По формуле Ньютона – Лейбница определенный интеграл от a до b равен приращению первообразной на интервале $[a; b]$. Получаем:

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}.$$

Задача 6. Вычислите: $I = \int\limits_{-1}^{2} 3^x dx$.

Решение. Учтем, что $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$. По формуле Ньютона – Лейбница определенный интеграл от a до b равен приращению первообразной на интервале $[a; b]$. Получаем:

$$I = \frac{3^x}{\ln 3}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{\ln 3} - \frac{3^{-1}}{\ln 3} = \frac{26}{3\ln 3}.$$

Задача 7. В отряде 50 солдат и 4 офицера. Сколькими способами можно выбрать одного офицера и четырех солдат для патрулирования?

Решение. Число сочетаний из n элементов по m равно:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Количество способов, которыми можно выбрать солдат в патрулирование:

$$C_{50}^4 = \frac{50!}{4! \cdot 46!} = \frac{46! \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{46! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 230300.$$

С каждой четверкой солдат может пойти любой офицер, поэтому получается $C_{50}^4 \cdot 4 = 230300 \cdot 4 = 921200$ различных способов.

<u>Задача 8.</u> Точка движется по плоскости XOY так, что ее радиус-вектор изменяется по закону: $\vec{r}(t) = 50e^{-2t} \cdot \vec{i} + (3t^2 - 2\sin(5t))\vec{j}$. Для момента $t' = 2{,}3$ с определите вектор скорости $\vec{\upsilon}$, его модуль, угол α между $\vec{\upsilon}$ и осью Ох.

Решение. Скорость равна производной радиус-вектора по времени. Вектор скорости, его модуль и угол с осью Ох равны:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{r}_t' = -100e^{-2t} \cdot \vec{i} + (6t - 10\cos(5t)) \cdot \vec{j}, \quad \upsilon(t) = \sqrt{(-100e^{-2t})^2 + (6t - 10\cos(5t))^2},$$

$$\alpha(t) = arctg\left(\frac{6t - 10\cos(5t)}{-100e^{-2t}}\right).$$ Подставим $t' = 2{,}3$ с:

$$\vec{\upsilon}(2{,}3) = -100e^{-2 \cdot 2{,}3} \cdot \vec{i} + (6 \cdot 2{,}3 - 10\cos(5 \cdot 2{,}3)) \cdot \vec{j} \approx -1{,}01 \cdot \vec{i} + 8{,}97 \cdot \vec{j},$$

$$\upsilon(2{,}3) \approx \sqrt{1{,}01^2 + 8{,}97^2} \approx 9{,}03, \quad \alpha(2{,}3) \approx arctg\left(\frac{8{,}97}{-1{,}01}\right) \approx -83{,}6^0.$$

<u>Задача 9.</u> Найти дивергенцию и ротор векторного поля в точке B(2, 1, 3):

$$\vec{a} = (4x^2 - y^3) \cdot \vec{i} + 3\vec{j} + (-2x + 3z^2) \cdot \vec{k}.$$

Решение. Проекции: $a_x = (4x^2 - y^3)$, $a_y = 3$, $a_z = (-2x + 3z^2)$. Получается:

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad rot\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \cdot \vec{k}.$$

Получаем: $div\,\vec{a} = 8x + 6z$, $rot\,\vec{a} = 0 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3y^2 \cdot \vec{k}$.

В точке B(2,1,3): $div\,\vec{a} = 8 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 34$, $rot\,\vec{a} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

В приложении к главе 8 представлены: 1) компьютерная программа на языке *ABCPascal*; 2) пример закодированного решения задачи 9, которое помещают в файл *Vhod.txt*; 3) файл *Arifm.txt,* содержащий термины-маркеры, соответствующие арифметическим операциям. При запуске программы она анализирует файл *Vhod.txt* и определяет сложность метода арифметических вычислений во входном тексте.

Таблица 8.1. Результаты оценки дидактической сложности задач

N	Матрица сложности	$ДС_1$	$ДС_2$
1	(18, 8, 38, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	64	43
2	(6, 52, 100, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	158	113
3	(4, 0, 108, 0, 0, 42, 0, 0, 0)	154	116
4	(3, 13, 73, 0, 0, 0, 124, 0, 0)	213	145
5	(12, 0, 85, 0, 0, 0, 69, 333, 0)	499	351
6	(12, 0, 92, 0, 0, 0, 108, 268, 0)	480	303
7	(35, 51, 123, 0, 27, 0, 0, 0, 0)	236	140
8	(31, 23, 286, 44, 0, 38, 74, 111, 0)	607	323
9	(12, 20, 202, 81, 0, 0, 0, 249, 831)	1395	895

Результаты оценки сложности перечисленных выше задач представлены в табл. 8.1, которая состоит из следующих столбцов: 1) номер задачи; 2) матрица сложности, компоненты которой определялись путем подсчета маркеров, соответствующих методам M_k, и учета их *ДС*; 3) дидактическая сложность $ДС_1$; 4) дидактическая сложность $ДС_2$. Видно, что самой простой является задача 1, а самой сложной – задача 9; их сложности отличаются примерно в 20 раз.

* * * * *

Сформулируем выводы: 1) каждая математическая задача может быть охарактеризована одномерной матрицей $\vec{S} = (S_1, S_2, ..., S_9)$, компоненты S_k которой пропорциональны сложности применения *k*-го метода для ее решения; 2) в качестве основных методов решения МЗ следует выбрать: методы чтения текста, арифметических вычислений, алгебраических преобразований, геометрических рассуждений и операций с векторами, применения формул комбинаторики, тригонометрии, использования логарифмов и экспоненциальных функций, дифференцирования и интегрирования, применения операторов; 3) сложность применения метода M_k при решении данной задачи может быть определена путем подсчета количества терминов-маркеров и учета их сложностей с помощью специальной компьютерной программы. Полученные результаты оценки сложности решений девяти математических задач доказывают эффективность применяемого подхода.

9. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

При изучении геометрии школьники учатся доказывать различные теоремы и использовать их для решения задач. При этом доказательство каждой теоремы (включая рисунок и формулировку) может рассматриваться как учебная задача, которая характеризуется объемом и сложностью. Практическое значение имеет вопрос об оценке сложности доказательства различных теорем и их сравнении друг с другом. Как определить, какая из теорем T_1 или T_2 сложнее и во сколько раз?

Доказательство теоремы (*ДТ*) состоит в проведении логических рассуждений и похоже на решение задачи; его сложность может быть оценена разными способами. Как указывалось выше, сложность – объективная характеристика задачи или *ДТ*, зависящая от числа элементарных рассуждений, связей между ними и видов связей [27, с. 57]. С логической точки зрения сложность может быть охарактеризована количеством исходных данных или посылок, а также числом логических звеньев (или шагов), связывающих условие задачи с результатом решения [46]. Развитие систем искусственного интеллекта привело к созданию программ, доказывающих различные утверждения [49]. Из **алгоритмической концепции** А. Н. Колмогорова [37] следует, что сложность таких доказательств пропорциональна количеству логических операций, которые должен выполнить человек или ЭВМ. Другие исследователи в качестве факторов, влияющих на сложность задачи (в том числе доказательства теоремы), называют количество и сложность элементов, отношений, формул, рассуждений, наличие громоздких математических преобразований и т. д. [83].

Итак, проблема состоит в: 1) разработке эффективного метода определения дидактической сложности доказательства теоремы, основанного на анализе ее объяснения, учете сложности и разнообразия используемых терминов; 2) оценке сложности часто используемых теорем и анализе результатов. Ее решение тесно связано с вопросами, проанализированными в работах И. Я. Лернера [46] (дидактика), А. М. Сохора [102] (теория учебника), B. Davis и D. Sumara [118] (сложность в дидактике), В. А. Гусева [21], Л. В. Жук [28], А. А. Столяра [103] (логика математических рассуждений), Г. Е. Крейдлина и А. Д. Шмелева [39], О. В. Зеркаля [31] (лингвистика), В. И. Шалака [111], M. D. White и E. E. Marsh [124] (контент-анализ).

1. Логические основы метода. Под доказательством теоремы (ДТ) понимают конечную последовательность утверждений $У_1$, $У_2$, ..., $У_N$, которая отвечает следующим требованиям [103]: 1) каждое утверждение $У_i$ является аксиомой, ранее доказанной теоремой либо следует из предшествующих утверждений; 2) последнее утверждение $У_N$ является формулировкой теоремы T. Чтобы понять доказательство теоремы, ученик должен «расшифровать» и проанализировать текст (включая формулы и рисунок), в первую очередь решив лингвистическую, а затем математическую проблему. В книге [39] рекомендуется провести «беглый лингвистический анализ математического текста», состоящий в выявлении математических конструкций, поиске кванторных смыслов, установлении смысловых и логических отношений между частями высказываний. При этом проводимые рассуждения раскладывают на **элементарные высказывания,** каждое из которых состоит из **субъекта и предиката**. Субъектом называется предмет, о котором что-то утверждается, а предикатом – «то, что утверждается или отрицается о субъекте» [17; 107]. Так, в суждении «квадрат есть четырехугольник» слово «квадрат» является субъектом, а «четырехугольник» – предикатом.

Как известно, свойства выражаются с помощью одноместного предиката. Пусть свойство «быть четырехугольником» соответствует одноместному предикату $P(x)$. Если $x =$«окружность» или «треугольник», $P(x) =$ложь; если $x =$«прямоугольник» или «трапеция», $P(x) =$истина. Для выражения отношений между предметами служат многоместные предикаты [103]. Например, отношения между двумя фигурами типа «треугольники ABC и A'B'C' подобны», «прямые AB и CB параллельны», «углы A и B равны» и т. д. соответствуют двуместным предикатам вида $P(x, y)$.

Дидактическая сложность *ДТ*, как и любого учебного текста, зависит от: 1) общего количества семантической информации; 2) разнообразия терминов; 3) количества логических рассуждений; 4) читабельности текста, определяемой средней длиной слов и предложений. Обычно старшеклассник не испытывает трудностей с чтением, поэтому последним фактором можно пренебречь. Один из возможных подходов состоит в том, что дидактическая сложность вычисляется как произведение семантической сложности *ДТ* (учитывающей логические рассуждения) и показателя разнообразия *ПР*, рассчитываемого по формуле, похожей на формулу Шеннона:

$$ПР = -\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{N} \ln\left(\frac{n_i}{N}\right).$$

Здесь $N = n_1 + n_2 + ... + n_N$ – общее количество терминов в доказательстве, n_i – число использований *i*-го термина.

Для оценки сложности *ДТ* текст доказательства, включая рисунки и формулы, нужно представить в текстовой форме, разложив его на отдельные элементарные высказывания с указанием логических связей между ними. Получившийся текстовый файл следует проанализировать с помощью специальной компьютерной программы, вычисляющей количество научных терминов, их суммарную сложность и показатель разнообразия. Это позволит определить объем *ДТ* в словах, общее количество семантической информации и средний коэффициент свернутости.

Вообще, **свертыванием информации** называется процесс ее аналитико-синтетической переработки, приводящий к ее уплотнению за счет образования новых семантических единиц с большей информационной емкостью. Средний **коэффициент свернутости** (*КСИ*) текста показывает степень концентрации информации и равен отношению числа «простых» слов (s = 1), необходимых для объяснения данного текста ученику со знаниями Z_0, к общему количеству слов в тексте [72]. *КСИ* понятия *П* относительно тезауруса Z_0 равен его семантической сложности относительно Z_0. За Z_0 выберем знания ученика 5 класса, который знаком с понятиями «точка», «прямая», «угол», «треугольник», «четырехугольник» и т. д., но еще не начинал изучать теоремы геометрии.

Известно, что смысловая информация предложения складывается из информативности слов и связей между ними: $I = I_{СЛ} N + I_К$, где N – число слов, $I_{СЛ}$ – средняя информативность слова, $I_К$ – информация, связанная с компоновкой предложений из некоторого множества слов. Набор слов, входящих в предложение с одним подлежащим и одним сказуемым, обычно позволяет сформировать от 2 до 6 различных элементарных высказываний, не противоречащих правилам русского языка. Поэтому $I_К$ для простых предложений не превышает $\log_2 6 \approx 2{,}6$ бит, что существенно меньше общей информативности предложения! На обычное слово русского языка в среднем приходится $I_{СЛ} =$ 7–8 бит информации, а информативность научного термина в десятки раз выше. Если же информативность терминов $I_{СЛ}$ «измерять» путем подсчета слов в их определениях (в которых слова тоже связаны между собой), то это позволит учесть «компоновочную информацию».

2. Метод и результаты оценки сложности *ДТ*. Сущность метода оценки семантической сложности доказательств теорем относительно тезауруса Z_0 заключается в следующем [63]: 1) создают текстовые файлы *T1.txt, T2.txt, T3.txt*, …, в которых представлены формулировки теорем T_1, T_2, T_3, …, описания рисунков и их доказательства с указанием всех посылок, выводов и логических связей (они содержат слова «значит»); 2) добавляют недостающие высказывания, которые заполняют смысловые пустоты и помогают ученику с тезаурусом Z_0 понять теорему и ее доказательство; 3) подсчитывают количество значимых слов в каждом файле, определяя их объем V_1, V_2, V_3, ...; 4) составляют список математических терминов (их количество обозначим через N), используемых во всех анализируемых *ДТ*, и его помещают в текстовый файл *Slovar.txt*; 5) путем подсчета числа слов в определениях, а также методом парных сравнений находят сложности терминов s_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), которые также записывают в файл *Slovar.txt*; 6) с помощью специальной компьютерной программы, обращающейся к файлу *Slovar.txt*, проводят контент-анализ каждого *ДТ*, подсчитывают количество n_i упоминаний каждого *i*-го термина и число обычных слов N' (их сложность равна 1 УЕИ); 7) суммируя сложности всех терминов и остальных слов, определяют семантическую информативность (сложность) текста: $S = I_{sem} = N' + n_1 s_1 + n_2 s_2 + \ldots + n_N s_N$; 8) для каждого *ДТ* вычисляют коэффициент свернутости информации $КСИ = I_{sem} / V$. Кроме того, определяют число элементов *R* на рисунке (прямые, окружности, отрезки и т. д.) и количество логических рассуждений *L*, что позволит вычислить альтернативный показатель сложности $S' = 3L + R$.

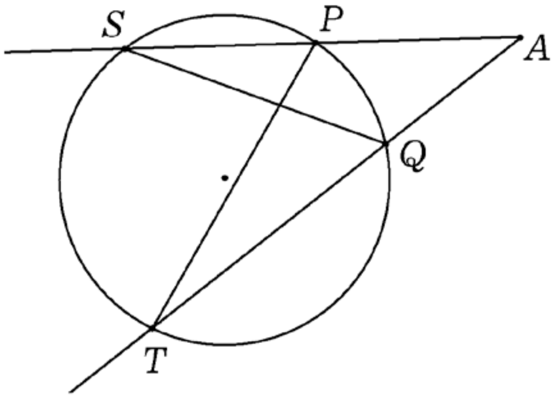


Рис. 9.1. К доказательству теоремы о двух секущих

При **текстовом кодировании доказательства** отдельные логические рассуждения заключим в фигурные скобки $\{\ldots\}$. Во избежание повторений различные высказывания будем подчеркивать и обозначать так: (В1), (В2); в дальнейшем вместо повторной формулировки будем указывать код высказывания без скобок: В5 или В7. В качестве примера рассмотрим текстовое кодирование доказательства **теоремы о произведении отрезков секущих:** Если через одну точку, не лежащую на окружности, проведены две секущие, то произведения каждой секущей на внешнюю часть секущей равны (рис. 9.1): $AP \cdot AS = AQ \cdot AT$. В ней число логических рассуждений, включая формулировку теоремы, $L = 6$; количество элементов на рисунке $R = 5$; показатель сложности $S' = 23$.

В закодированном виде доказательство этой теоремы выглядит так: «Рисунок: окружность, точка A вне окружности, секущая PS и секущая QT проходят через A. Из рисунка следует, что угол SPT и угол SQT вписанные и опираются на одну дугу (B1). {Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны (B2), B1, значит, угол SPT и угол SQT равны (B3).} Из рисунка следует, что угол APT равен развернутый угол минус угол SPT (B4). Из рисунка следует, что угол AQS равен развернутый угол минус угол SQT (B5). {B3, B4, B5, значит, угол APT и угол AQS равны (B6).} {Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны, угол A общий, B6, значит, треугольник APT и треугольник AQS подобны (B7).} {Если треугольники подобны, то отношения соответствующих сторон треугольников равны, B7, значит, AP делить на AQ равно AT делить на AS (B8).} {Если обе части равенства умножить на одно число, то равенство останется истинным, B8, значит, AP умножить AS равно AQ умножить AT (B9).}

Для оценки сложности математических терминов находят число значимых слов в определениях и применяют метод парных сравнений. Используемые математические термины были напечатаны на карточках, которые раскладывают на шкале сложности [112]. Эксперт произносит определение понятия, подсчитывает количество слов в нем и, сравнивая одно понятие с другими, кладет карточку в соответствующее место шкалы. В файл *Slovar.txt* помещают список терминов без изменяемых окончаний с указанием их сложности s_i. Получилось так: «четырехугольник 4, косинус 13, синус 13, вертикальн(ый) 4, вписан(ный) 5, гипотенуз(а) 5, делит(ь) 4, диагонал(ь) 5, дроб(ь) 7, дуга 5, касательн(ая) 6, минус 2, окружност(ь) 5, угол 3, умнож(ить) 5, хорд(а) 6, число 2, прям(ая) 3, a 2, b 2, c 2, …». В текстах *ДТ* встречаются слова «из рисунка следует», «значит», «если», выражающие логические связи между высказываниями [63]. При текстовом кодировании слово «значит» используется для связи одной или нескольких посылок с выводом; его сложность считается равной 10, а число вхождений в *ДТ* – количеству логических рассуждений. Сложности слов «следует» и «если» считаются равными 3.

Перечислим теоремы, у которых была оценена дидактическая сложность:

1. Теорема о площади треугольника. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту: $S = AB \cdot h / 2$.

2. Теорема о трех перпендикулярах. Если в плоскости провести прямую через основание наклонной прямой перпендикулярно к проекции наклонной прямой на данную плоскость, то эта прямая будет перпендикулярна и к самой наклонной прямой.

3. Теорема о двух хордах. Если две хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

4. Теорема о параллельных прямых и угле. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

5. Теорема о сумме углов треугольника. Сумма углов треугольника равна 180 градусам: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

6. Теорема о двух секущих. Если через одну точку A, не лежащую на окружности, проведены две секущие AP и AQ, то произведения каждой секущей на внешнюю часть секущей равны: $AP \cdot AS = AQ \cdot AT$.

7. Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника ABC *равен сумме квадратов катетов:* $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

8. Теорема синусов. Стороны треугольников пропорциональны синусам противолежащих углов: $a / \sin\angle A = b / \sin\angle B = c / \sin\angle C$.

9. Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$.

10. Теорема о секущей и касательной, проведенных из одной точки. Если из точки А, взятой вне окружности, проведены к окружности секущая АМ и касательная АВ, то произведение секущей АМ на внешнюю часть секущей АК равно квадрату отрезка касательной АВ: $AB^2 = AK \cdot AM$.

11. Теорема Менелая о треугольнике и прямой. Если точки P, Q, R лежат соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC или продолжениях сторон, то точки находятся на одной прямой, когда

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{AR} = 1.$$

12. Теорема Птолемея о вписанном четырехугольнике. Если четырехугольник вписан в окружность, то произведение длин его диагоналей равно сумме произведений длин двух пар его противоположных сторон:

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC.$$

В приложении к главе 9 представлены примеры теорем и их доказательств после их кодирования вербальным кодом, а также пример доказательства теоремы Пифагора с помощью нейросети. В принципе возможно создать онлайн-ресурс, который позволит автоматически решать школьные задачи, доказывать теоремы и определять их дидактическую сложность.

Таблица 9.1. Результаты оценки сложности доказательства теорем

	Название теоремы	N'	N_T	V	S_T	I_{sem}	ПР	ДС	L	R	S'	КСИ	ε
1	Т. о площади треугольника	8	81	89	278	286	2,74	784	4	6	18	3,21	0,045
2	Т. о трех перпендикулярах	11	98	109	361	372	2,39	889	4	5	17	3,41	0,037
3	Т. о двух хордах	9	121	130	411	420	3,22	1352	6	5	23	3,23	0,046
4	Т. о сумме углов треугольн.	9	163	172	432	441	2,81	1239	6	5	23	2,56	0,035
5	Т. о паралл. прямых и угле	14	154	168	471	485	3,15	1528	8	4	28	2,89	0,048
6	Т. о двух секущих	12	152	164	474	486	3,12	1516	6	5	23	2,96	0,037
7	Т. Пифагора	8	153	161	533	541	2,97	1607	8	4	28	3,36	0,050
8	Т. синусов	16	151	167	648	664	2,85	1892	7	3	24	3,98	0,042
9	Т. о секущей и касательной	13	219	232	713	726	3,18	2309	9	5	32	3,13	0,039
10	Т. Менелая	18	296	314	847	865	3,06	2647	12	5	41	2,75	0,038
11	Т. косинусов	14	232	246	902	916	3,24	2968	8	4	28	3,72	0,033
12	Т. Птолемея	20	341	361	983	1003	2,95	2959	15	8	53	2,78	0,042

Результаты оценки сложности доказательств перечисленных теорем представлены в табл. 9.1 [63]. Она состоит из столбцов: 1) список теорем; 2) число «обычных» слов N', у которых $s_i = 1$; 3) число научных терминов N_T, сложность которых $s_i > 1$; 4) объем *ДТ*, равный количеству слов $V = N_T + N'$; 5) сумма сложностей используемых терминов $S_T = n_1 s_1 + n_2 s_2 + ...$, вычисленная компьютером; 6) общая сложность *ДТ*, измеренная путем подсчета количества семантической информации $S = I_{sem} = N' + S_T$; 7) показатель разнообразия терминов *ПР*; 8) дидактическая сложность *ДС*, вычисляемая как произведение количества семантической информации I_{sem} и показателя разнообразия K_P: $ДС = I_{sem} \cdot K_P$; 9) количество логических утверждений L, включая формулировку теоремы; 10) число элементов R на рисунке, используемом в доказательстве; 11) показатель сложности $S' = 3L + R$; 12) коэффициент свертывания информации $КСИ = I_{sem} / V$; 13) отношение количества логических рассуждений к общему числу слов в доказательстве теоремы $\varepsilon = L / V$.

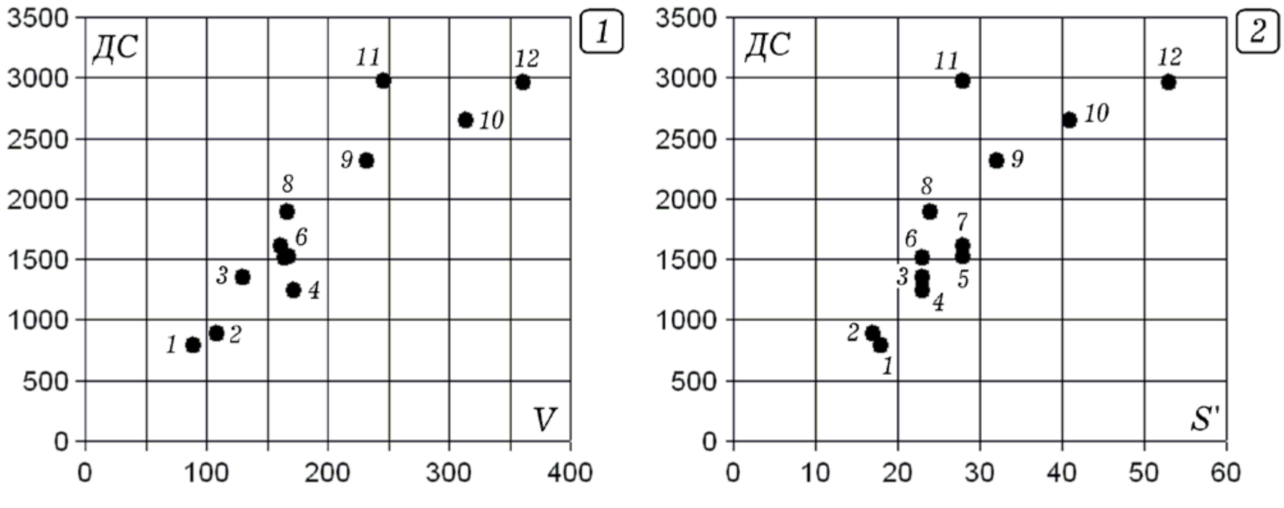


Рис. 9.2. Распределение теорем в пространстве признаков *ДС*, V и S'

Проанализируем распределение *ДТ* в двух пространствах признаков: 1) дидактическая сложность *ДС* – объем V (рис. 9.2.1); 2) дидактическая сложность *ДС* – показатель сложности S' (рис. 9.2.2). Видно, что в обоих случаях большинство точек лежат вблизи возрастающих прямых. Об этом же говорят **коэффициенты линейной корреляции,** вычисленные в *Excel*: 0,92 и 0,81 соответственно. Из общей закономерности выпадает 11-й объект – теорема косинусов; это объясняется тем, что в ее доказательстве присутствуют разнообразные термины с высокой степенью абстрактности ($ПР = 3{,}2$, $КСИ = 3{,}7$).

Из полученных значений (табл. 9.1) следует: 1) средний *КСИ* в доказательствах находится в интервале 2,5–4; 2) доказательства рассмотренных теорем отличаются по дидактической сложности в 1–3,8 раза, а по объему – в 1–4 раза; 3) дидактическая сложность *ДС* хорошо коррелирует с показателем сложности $S' = 3L + R$ и объемом V; 4) отношение количества логических рассуждений к общему числу слов в *ДТ* ε лежит в интервале 0,03–0,05, то есть на один логический вывод из двух или трех посылок в среднем приходится 20–30 слов; 5) количество семантической информации варьируется в 3,5 раз (от 286 до 1003 УЕИ); 6) показатель разнообразия терминов изменяется от 2,4 до 3,25 [63].

ДТ характеризуются высокими показателями насыщенности учебного текста логическими рассуждениями. Вообще, в доказательствах рассмотренных теорем используется примерно один и тот же набор терминов (прямая, окружность, угол и т. д.), поэтому *КСИ* изменяется незначительно и информативность I_{sem} примерно пропорциональна объему V и числу утверждений L. Найденные значения I_{sem}, *ДС, ПР* и *КСИ* позволяют сравнить доказательства теорем с другими дидактическими объектами: учебными задачами, фрагментами текста, рисунками, формулами и т. д.

* * * * *

Рассматриваемый подход заключается в создании файла, в котором закодированы формулировка теоремы, рисунок и ее доказательство, с последующим его анализом с помощью специальной компьютерной программы. Программа обращается к словарю – файлу, содержащему список терминов с указанием их сложностей. В результате оценки сложности доказательств 12 теорем из школьного курса геометрии определены: 1) количество семантической информации; 2) показатель разнообразия терминов; 3) средний коэффициент свернутости. Предложенный метод позволяет оценить дидактическую сложность любого информационного блока, содержащего решение задачи, вывод формулы, доказательство теоремы и т. д.

10. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Как уже отмечалось ранее, существующие методы оценки дидактической сложности ФЗ [8; 19; 40; 82; 95; 97] имеют существенный недостаток: они, как правило, не учитывают смысловую сложность используемых понятий, физических величин, законов и т. д. Поэтому необходимо разработать метод определения **физической, математической и вычислительной сложностей** решения ФЗ, основанный на контент-анализе ее объяснения и учете семантической сложности используемых терминов. При этом предполагается, что дидактическая сложность УЗ пропорциональна количеству семантической информации в условии и объяснении ее решения. Используется тезаурусный подход, предусматривающий выделение в объяснении УЗ элементарных смысловых единиц (научных понятий и «обычных» слов) и их подсчет [61; 105].

Рассматриваемой проблеме посвящены работы следующих ученых: Г. А. Балл [8], Э. Г. Гельфман и М. А. Холодная [16] (психолого-педагогический аспект), В. С. Бабаев, М. В. Кулагина и Ю. Ю. Шкитина [7], А. В. Гидлевский [19], В. М. Кротов [40], О. Э. Наймушина, Б. Е. Стариченко [82], Н. Г. Рыженко [95], А. Л. Сакович [97] (трудность и сложность ФЗ), Е. Я. Таршис [105] (контент-анализ текстов). Некоторые ее аспекты обсуждается в работах А. С. Гунасекера [20], Н. С. Журавлевой [29], Л. А. Ларченковой [44], А. П. Усольцева и Т. Н. Шамало [106] (решение задач и формирование мышления).

1. Компоненты сложности задачи. Как известно, ФЗ – это проблемная ситуация, требующая от учащихся мыслительных и/или практических действий, связанных с применением законов и методов физики, разрешение которой приводит к овладению физическими знаниями и развитию мышления [8;

29; 44]. Физическая задача – **многомерный объект,** описывающийся большим числом характеристик, одной из которых является дидактическая сложность.

В процессе обучения реализуются две принципиально различные ситуации: 1) самостоятельное решение задачи учеником, в ходе которого он сам выбирает законы и формулы, соответствующие анализируемому явлению; 2) понимание готового решения, овладение логикой рассуждений, которые проводит учитель или автор учебника. Мы рассматриваем только теоретические ФЗ.

Ученые-методисты (например, в [8]) выделяют **четыре этапа** решения физической задачи: 1) осмысление ее условий, анализ рассматриваемой ситуации; 2) физический этап решения: запись системы уравнений (формул), выражающих законы и определения физических величин; 3) математический этап решения: осуществление алгебраических преобразований и решение ФЗ в общем виде (то есть получение конечной формулы); 4) вычислительный этап решения: выполнение расчетов, получение числового ответа. Поэтому логично считать, что дидактическая сложность задачи по физике складывается из:

1) **физической сложности** задачи ($ФС$) – сложности физических понятий, законов, уравнений и рассуждений, которые необходимо использовать для построения соответствующей физической модели;

2) **математической сложности** задачи ($МС$) – сложности математических понятий, положений, уравнений и рассуждений, требующихся для ее решения;

3) **вычислительной сложности** ($ВС$), зависящей от количества и сложности вычислительных операций [67].

Как известно, сложность объекта пропорциональна информативности его самого краткого и одновременно полного описания [61]. Так как вербальное кодирование является самым универсальным и позволяет закодировать любую информацию (текст, рисунок, формулы), то для оценки сложности различных компонентов решения ФЗ следует перейти к их словесному описанию, а затем оценить информативность получившихся текстов. Дидактическая сложность

(*ДС*) учебного текста равна произведению его структурной и семантической сложностей [72]: $DC = S_{стр} S_{sem}$. Структурную сложность одного предложения или текста будем вычислять по формуле: $S_{стр} = D_{сл}(1 + \ln D_{пр})/13$, где $D_{сл}$ – среднее число букв в слове (длина слова), $D_{пр}$ – среднее число значимых слов в предложении. Структурная сложность предложения, состоящего из 5 слов по 5 букв каждое, равна $S_{стр}' = 5(1 + \ln 5)/13 \approx 1$.

Семантическая сложность S_{sem} текста приблизительно равна сумме семантических сложностей составляющих его слов (понятий, терминов). Сложность термина T относительно некоторого тезауруса Z_0 равна суммарной сложности слов из тезауруса Z_0, которые позволяют объяснить сущность термина *Т*. Для оценки школьных ФЗ в качестве Z_0 выберем тезаурус выпускника 5 класса, а сложность простых общеупотребительных слов примем равной 1. Нам удалось определить *ДС* сначала простых, а затем сложных терминов, обозначающих физические объекты и величины [61; 72]. Были получены следующие результаты: твердое тело – 4, атом – 8, длина волны – 14, электромагнитные колебания – 20, цепная ядерная реакция – 37, спектральная плотность интенсивности излучения – 55 и т. д.

2. Оценка сложности учебной задачи. Предлагаемый метод определения семантической сложности $SC = S_{sem}$ объяснения задачи предусматривает применение написанной в среде *ABCPascal* компьютерной программы, которая анализирует входной текстовый файл. Программа обращается к файлу *Slovar.txt*, содержащему список терминов с указанием их сложностей s_i, выбирает очередной термин, определяет количество его употреблений в тексте и, учитывая s_i, находит S_{sem} текста.

Рассмотрим ученика, решающего ФЗ. Пусть в её условии и решении некоторый термин T_i (физическая величина или математическая операция) со сложностью s_i встречается n_i раз. Если при первой встрече учащийся не сразу припоминает смысл термина T_i, то при втором, третьем упоминаниях это припоминание происходит быстрее и легче. Будем считать, что трудность термина T_i при каждом обращении уменьшается приблизительно на 30 % от предыдущего значения, но не становится меньше $0{,}1s_i$, при этом всегда превышая 2. В главе 2 показано, как это можно учесть.

Все физические формулы подразделяются на два класса: 1) **формулы-определения,** в которых определяется новая физическая величина на основе других абстракций; 2) **формулы, выражающие функциональные зависимости** между физическими величинами. Для нахождения семантической сложности формулы, выражающей функциональную зависимость (например, $E_ф = h\nu$), вычисляют сумму семантических сложностей всех составляющих ее терминов. Если речь идет об определении некоторой физической величины (например, $C = q/U$), то семантическая сложность определяемой величины (то есть емкости C) не учитывается. Семантическая сложность формулы-определения равна сумме семантических сложностей всех величин, входящих в формулу, за исключением определяемой величины.

В случае, когда формула содержит коэффициент пропорциональности (например, $F = k\Delta l$), то его семантическая сложность считается равной 5. Другой подход, заключающийся в формулировании определения коэффициента k (жесткость равна сила делить на удлинение) и подсчете суммарной сложности всех терминов, приведет к тому, что сложность формулы $F = k\Delta l$ окажется завышенной почти в 2 раза.

2.1. Оценка физической сложности ФЗ. Для оценки физической сложности задачи следует: 1) сформулировать условие так, чтобы оно кратко и в то же время полно отражало анализируемую физическую ситуацию и содержало перечисление всех физических объектов; 2) выписать 5 ключевых терминов – самых сложных научных понятий, используемых при решении ФЗ; 3) записать исходные формулы и полученный результат в общем виде (то есть конечные формулы); 4) закодировать исходные и конечные формулы словесным кодом и представить их в виде отдельных предложений, содержащих названия объектов, физических величин и математических операций. Например: $W = CU^2 / 2$ – «энергия конденсатора равна емкость умножить на напряжение квадрат, делить на число». Или $E = F / q$ – «напряженность электрического поля равна сила делить на заряд»; 5) создать файл *F1.txt,* в который поместить условие, ключевые термины, исходные и конечную формулы, закодированные вербальным кодом; 6) с помощью компьютерной программы проанализировать файл *F1.txt,* определить общую семантическую сложность SC_1; 7) вычислить физическую сложность $ФС$ решения задачи как сумму сложностей всех терминов и обычных слов [67].

2.2. Оценка математической сложности ФЗ. Из анализа школьных задачников [26; 96] следует, что для решения ФЗ применяются методы, предполагающие: 1) использование формул элементарной геометрии: $L = 2\pi R$, $S = \pi R^2$, $V = abc$ и т. д.; 2) сложение и вычитание векторов, проецирование векторных уравнений на оси координат; 3) решение системы алгебраических уравнений; 4) решение квадратного уравнения; 5) применение теоремы Пифагора, теоремы косинусов, теоремы подобия и других теорем геометрии; 6) использование тригонометрических формул; 7) сложные алгебраические преобразования и вычисления со степенями, корнями, логарифмами и т. д.; 8) нахождение производных и интегралов. В этом списке отсутствуют такие универсальные методы, как: чтение, письмо, рисование, осуществление элементарных математических преобразований и арифметических вычислений. Они формируются в 1–5 классах и при определении *МС* не учитываются.

Математическая сложность ФЗ зависит от: 1) количества и сложности используемых математических функций (показательная, синус, логарифм и т. д.); 2) количества величин (постоянных и переменных) в уравнениях; 3) сложности применяемых математических операций, формул, теорем, правил, утверждений [67]. Для оценки *МС* задачи следует: 1) решить задачу максимально простым способом; 2) сосчитать количество переменных и коэффициентов p, чисел c, знаков равенства r, операций сложения или вычитания s, умножения или деления u; 3) создать текстовый файл *F2.txt*, содержащий закодированные формулы и формулировки математических правил и теорем, применяемых при решении ФЗ; 4) проанализировать файл *F2.txt* с помощью компьютерной программы и определить его сложность SC_2 как сумму сложностей математических понятий и «обычных» слов; 5) вычислить математическую сложность:

$$MC \approx 3p + 2c + 2r + \sum_i n_i s_i + SC_2,$$

где n_i – число использований i-й операции O_i, s_i – ее сложность, а коэффициенты перед p, c и r равны сложностям понятий «переменная», «число» и «равно» соответственно. Сложность математических операций O_i может быть оценена так: 1) сложение или вычитание: $s_1 = 2$; 2) умножение или деление: $s_2 = 3$; 3) возведение в квадрат или куб $s_3 = 3$; 4) извлечение корня $s_4 = 4$; 5) подстановка одной формулы в другую $s_5 = 4$ и т. д.

2.3. Оценка вычислительной сложности ФЗ. Для оценки BC необходимо в конечную формулу (или формулы) подставить числовые значения и произвести вычисления на калькуляторе. Вычислительная сложность зависит от: 1) количества нажатий k на кнопки калькулятора; 2) семантической сложности SC_3 всех понятий, обозначающих математические функции (корень, синус, логарифм и т. д.), которые входят в конечную формулу [67]. Так как для осуществления вычислений на калькуляторе не требуется вспоминать определения этих функций, то при нахождении SC_3 будем считать, что их сложность лежит в интервале от 4 до 6. Вычислительная сложность задачи $BC \approx 2k + SC_3$.

В качестве примера рассмотрим применение предлагаемого метода для оценки сложности трех задач из ЕГЭ [26].

<u>Задача 1.</u> *Груз массой 0,4 кг подвешен на пружине жесткостью 100 Н/м к потолку лифта. Лифт из состояния покоя равноускоренно поднимается*

вверх на расстояние 5 м в течение 2 с. Каково удлинение пружины, когда колебания груза затухнут? Применяются формулы: $\vec{F}_{упр} + m\vec{g} = m\vec{a}$, $F_{упр} = k\,x$, $S = at^2/2$. После алгебраических преобразований получается окончательная формула $x = m(g + 2S/t^2)/k$. Произведем вычисления:

$$x = \frac{0{,}4(9{,}8 + 2\cdot 5/2^2)}{100} \approx 0{,}049\ (м).$$

Перечислим ключевые термины: тело, равноускоренное движение, жесткость, удлинение, колебания. Семантическая сложность условия задачи и ключевых слов, исходных и конечных формул (то есть физическая сложность) составляет $ФС = 172$. В решении используются $p = 30$ переменных и коэффициентов, $c = 4$ числа, $r = 7$ уравнений (знаков «равно»). Математические операции: 1) сложение (вычитание) – $n_1 = 5$ раз; 2) умножение (деление) – $n_2 = 16$ раз; 3) подстановка одной формулы в другую – $n_5 = 2$ раза. Их сложность составляет 174. Также применяются правила: 1) «если левую и правую части истинного равенства умножить (разделить) на одно и то же число, то равенство останется истинным» – 2 раза; 2) «если вектор сонаправлен с осью координат, то его проекция на ось положительна, а если противоположно направлен – отрицательна» – 3 раза. Их сложность, определенная путем суммирования сложностей понятий с помощью компьютерной программы, $SC_2 \approx 99$. В результате математическая сложность этой ФЗ равна: $MC \approx 174 + 99 = 273$.

Чтобы произвести вычисления, необходимо $k = 21$ раз нажать на кнопки калькулятора и один раз использовать понятие «квадрат», поэтому $BC \approx 45$. Если результаты оценки сложности записать в формате: (физическая сложность, математическая сложность, вычислительная сложность), то получится так: (172; 273; 45). Этой матрице соответствует точка в трехмерном пространстве, образованном осями $ФС$, MC, BC. Если из текста удалить союзы, предлоги и определить среднюю длину слов и предложений, то можно вычислить структурную сложность решения задачи. При этом список ключевых слов и каждая формула рассматриваются как отдельные предложения. Получается, что $S_{стр} \approx 1{,}89$. Дидактическая сложность задачи

$$DC = S_{str}(ФC + MC + BC) \approx 930.$$

<u>Задача 2.</u> *Ион с зарядом* $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ *Кл и массой* $m = 1{,}5 \cdot 10^{-25}$ *кг проходит ускоряющую разность потенциалов* $U = 1000$ *В и после этого попадает в однородное магнитное поле, в котором движется по окружности радиусом* $R = 0{,}3$ *м. Определить модуль индукции магнитного поля.* Применяются формулы: $K = m\upsilon^2/2$, $A = K_2 - K_1$, $A = qU$, $F = ma$, $F_Л = q\upsilon B$, $a = \upsilon^2/R$. Решим эту систему уравнений относительно B:

$$A = qU = \frac{m\upsilon^2}{2}, \quad q\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{R}, \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2qU}{m}}, \quad B = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Последняя формула является конечной. Выполним вычисления:

$$B = \frac{1}{0{,}3}\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-25} \cdot 10^3}{3{,}2 \cdot 10^{-19}}} \approx 10{,}2\,(Тл).$$

Перечислим ключевые понятия: ион, заряд, магнитное поле, индукция магнитного поля, потенциал. Семантическая сложность условия задачи и ключевых слов, исходных и конечных формул (то есть физическая сложность) составила $ФC \approx 350$. В решении используются: $p = 39$ переменных, $c = 2$ чисел, $r = 11$ уравнений. Математические операции: $n_1 = 1$, $n_2 = 21$, $n_3 = 4$, $n_4 = 3$, $n_5 = 5$ раз. Применяются правила: 1) «Если левую и правую части истинного равенства умножить (разделить) на одно и то же число, то равенство останется истинным» – 3 раза; 2) правило: «Если из левой и правой частей равенства извлечь корень, то равенство останется истинным» – 1 раз. Их сложность $SC_2 \approx 68$. Получаем, что математическая сложность $MC \approx 320$. Чтобы произвести вычисления, необходимо $k = 36$ раз нажать на кнопки калькулятора и при этом один раз извлечь корень, поэтому $BC \approx 76$. Если результаты оценки сложности записать в формате: (физическая сложность, математическая сложность, вычислительная сложность), то получится так: (350; 320; 76). Определив средние длины слов и предложений, найдем структурную сложность $S_{стр} \approx 1{,}89$. Тогда дидактическая сложность $DC = S_{str}(ФС + MC + BC) \approx 1410$. Коэффициент свернутости информации $КСИ = ФС / V \approx 3{,}64$, где V – объем (число слов без предлогов и союзов) физической составляющей решения ФЗ.

Задача 3. *Сколько фотонов с длиной волны 0,45 мкм попадает на сетчатку глаза за 2 с, если мощность поглощенного сетчаткой излучения на этой длине волны составляет* $1{,}98 \cdot 10^{-17}$ *Вт?* Исходные формулы: $E_{изл} = Pt$, $E_{изл} = N h\nu$, $\nu = c/\lambda$. Промежуточный результат: $Pt = N hc/\lambda$. Конечная формула: $N = Pt\lambda / hc$. Ключевые термины: фотон, длина волны, мощность, энергия, излучение. Физическая сложность задачи $ФС = 218$. В решении используются: $p = 22$ переменных, $r = 5$ уравнений (знаков «равно»). Математические операции: умножение – $n_2 = 12$, подстановка – $n_5 = 2$. Применяется правило: «если левую и правую части истинного равенства умножить (разделить) на одно и то же число, то равенство останется истинным» – 2 раза. Получается $SC_2 \approx 32$, математическая сложность $MC \approx 152$. Вычислительная сложность 86. Получаем матрицу: (218, 152, 86). Структурная сложность: $S_{стр} \approx 1{,}79$. $ДС$ равна $DC = S_{стр}(ФС + MC + BC) \approx 820$.

В качественных задачах, а также заданиях, требующих выбора правильных утверждений без вывода формул и вычислений, математическая и вычислительная сложности равны нулю. Рассмотрим пример задания из ЕГЭ [26, с. 22]: *Выберите все верные утверждения о физических явлениях, величинах и закономерностях: 1) атмосферное давление возрастает с высотой над поверхностью Земли; 2) при неизменной температуре нагревателя КПД идеальной тепловой машины повышается с понижением температуры холодильника; 3) одноименные точечные электрические заряды отталкиваются друг от друга, разноименные точечные заряды притягиваются друг к другу; 4) период* *гармонических электромагнитных колебаний в идеальном контуре, состоящем из катушки индуктивности и конденсатора, уменьшается при сближении пластин конденсатора; 5) альфа-излучение отклоняется в магнитном поле.* Выполнение этого задания предполагает сравнение перечисленных утверждений с фактуальными знаниями ученика. В тексте 513 букв, 58 слов, 6 предложений. Физическая сложность текста $ФС \approx 206$, структурная сложность (надо удалить все предлоги и нумерацию) $S_{стр} \approx 2{,}22$, поэтому дидактическая сложность $DC = S_{стр} ФС \approx 460$. Коэффициент свернутости информации вычисляется так: $КСИ = ФС / N_{слов} \approx 3{,}61$.

* * * * *

Дидактическая сложность физической задачи равна произведению структурной сложности на сумму физической, математической и вычислительной сложностей. Сущность предлагаемого метода состоит в вербальном кодировании условия и решения задачи с последующим определением семантической сложности различных составляющих ее решения. Для этого используется специальная компьютерная программа, обращающаяся к словарю научных терминов и вычисляющая семантическую сложность текста. С помощью предложенного метода произведена оценка трех задач и одного качественного задания по физике. Полученные оценки *ДС* фактически характеризуют сложность понимания учеником готового решения физических задач. Если ученик решает задачи самостоятельно, то он должен сам выбрать «правильные» формулы, соответствующие анализируемому явлению. В этом случае физическую сложность задачи, найденную рассмотренным выше методом, следует умножить на коэффициент, зависящий от неопределенности выбора формул.

11. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ФОРМУЛЬНЫХ ЗНАНИЙ ПО ФИЗИКЕ

Важной составляющей физических знаний школьника являются так называемые формульные знания. Физические формулы отражают объективные взаимосвязи между различными величинами, понятиями, объектами и их теоретическими моделями. Работа с формулами требует от учащихся умения анализировать, сравнивать, обобщать и систематизировать информацию, что способствует развитию логического мышления и формированию научного мировоззрения. Умение применять формулы для решения задач является универсальным навыком, который востребован не только в физике, но и в других областях знаний. Формирование и развитие системы физических формул в ментальном пространстве ученика позволяет лучше усваивать новый материал и устанавливать связи с ранее изученными вопросами, способствует построению физической картины мира и овладению методами научного познания (анализ, моделирование, формализация) и т. д.

1. Обсуждение проблемы. Совокупность изучаемых в школе формул образует систему формульных знаний (СФЗ), состоящую из взаимосвязанных элементов, которой присущи все основные **свойства систем** [5]: целостность, связанность, взаимодействие, наличие иерархической структуры, целенаправленность, эмерджентность, ограниченность, сложность и т. д. Без формул невозможно решить задачи или построить математические модели изучаемых явлений. Некоторые физические величины входят в разные формулы, это позволяет решать двух- и многоформульные задачи (для которых требуется несколько формул). Выполнение лабораторных работ также требует понимания физических формул, умения производить алгебраические операции и вычисления. Сложность учебной дисциплины или изучаемой темы часто связывают со сложностью и числом используемых в ней формул. Поэтому проблема изучения системы формул, входящих в школьный курс физики, актуальна.

Сформулируем стоящие перед нами задачи следующим образом: апробировать различные подходы к изучению **системы формульных знаний** школьного курса физики, позволяющие определить ее основные характеристики, выявить семантические связи между входящими в формулы физическими понятиями, осуществить их кластеризацию, создать семантическую сеть, изображающую часть ментального пространства ученика.

Для достижения поставленной цели нами проведен контент-анализ учебников физики за 10–11 классы (авторы Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, Н. Н. Сотский, В. М. Чаругин) [89–91; 79; 80]; в результате составлен список основных формул, знание которых необходимо для успешного усвоения физики. Путем вербального кодирования выписанных формул получен текстовый файл *Formula.txt*, который анализировался с помощью онлайн-ресурсов Интернета и компьютерных программ, написанных в *ABCPascal*. Это позволило выявить входящие в формулы ключевые понятия, определить степень смысловой близости (связанности), рассчитать матрицу семантических расстояний в *Excel*, осуществить кластеризацию понятий, построить семантическую сеть, визуализирующую связи между ними. Рассматриваемый подход опирается на работы следующих ученых: Н. К. Андриевская [4], А. В. Антонов [5], Г. А. Балл [8], С. Х. Бермудес [10], А. С. Ванюшкин и Л. А. Гращенко [13], С. И. Монахов, В. В. Турчаненко, Е. А. Федюкова и Д. Н. Чердаков [78], С. В. Ракитина [92], В. А. Яцко [114], C. D. Manning, P. Raghavan и H. Schütze [120].

2. Система формульных знаний. Предлагаемая методика изучения системы формульных знаний состоит в следующем [69; 73]:

1) из учебника выписывают все основные формулы (обведенные в рамку или выделенные жирным шрифтом), которые необходимо знать для решения стандартных физических задач;

2) формулы кодируют в текстовом файле *Formula.txt*, заменяя буквы и математические символы названиями физических величин и операций;

3) получают список понятий, входящих в формулы, с указанием количества использований, выявляют ключевые понятия;

4) с помощью онлайн-ресурса *https://nocodefunctions.com* создают семантическую сеть из понятий, составляющих формульные знания;

5) вычисляют косинусные меры близости между ключевыми понятиями, а затем рассчитывают семантические расстояния между ними;

6) исходя из матрицы расстояний, осуществляют кластеризацию понятий.

3. Характеристики системы физических формул. Из обоих учебников физики за 10 и 11 классы [79; 80] выписывают основные формулы, а затем осуществляют их вербальное кодирование, создавая текстовый файл *Formula.txt*. Например, формула $P = I^2 R$ кодируется предложением: «Мощность электрического тока равна квадрат силы тока умножить на сопротивление проводника». Получившийся текст содержит названия физических величин («мощность», «сила тока», «сопротивление»), понятия, обозначающие объекты («газ», «ток», «поле») и математические символы («равно», «корень», «делить», «производная» и т. д.).

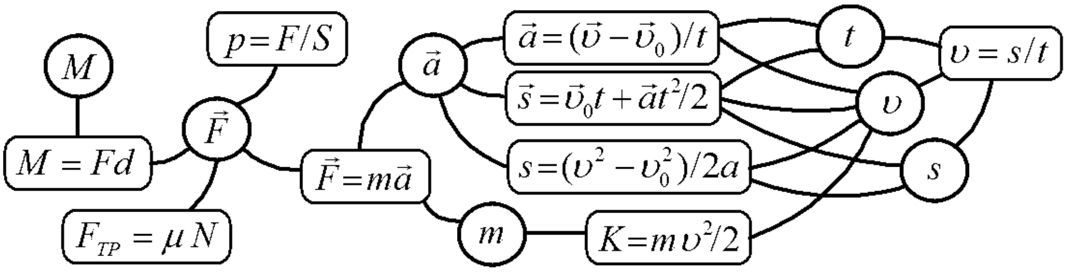


Рис. 11.1. Фрагмент графа «формулы – величины» по механике

Система формул может быть представлена в виде графа «формулы – величины». Его фрагмент, соответствующий небольшой части раздела «Механика», представлен на рис. 11.1. На нем физические величины изображены в кружках, а составленные из них формулы – в прямоугольниках; линии показывают связи. На основе таких графов можно организовать повторение формул на уроке. Для этого достаточно удалить формулы из прямоугольников, вывести получившийся «полупустой» граф на экран и предложить ученикам восстановить отсутствующие записи.

Сложность и связность СФЗ по физике можно охарактеризовать: 1) числом формул: 148; 2) количеством входящих в них величин: 67; 3) числом упоминаний физических величин: 651; 4) средним числом величин в одной формуле: 651 / 148 = 4,4 (среднее число связей, приходящихся на одну формулу); 5) средним числом связей, приходящихся на одну величину: 651 / 67 = 9,7.

Из файла *Formula.txt* с помощью интернет-ресурса advego.com получен список понятий, входящих в состав физических формул, с указанием их количества. Это позволило выявить ключевые понятия, часто используемые в формулах [13]. К ним относятся следующие физические величины: скорость – 67 упоминаний, вектор – 45, масса – 45, сила – 32, расстояние – 31, заряд – 27, энергия – 26, сила тока – 24, напряжение – 21, изменение – 17. Если величины проранжировать, то есть расположить в порядке убывания частоты, а затем построить зависимость частоты использования от ранга, получится кривая, соответствующая распределению Ципфа [75]. Она показана на рис. 11.2.

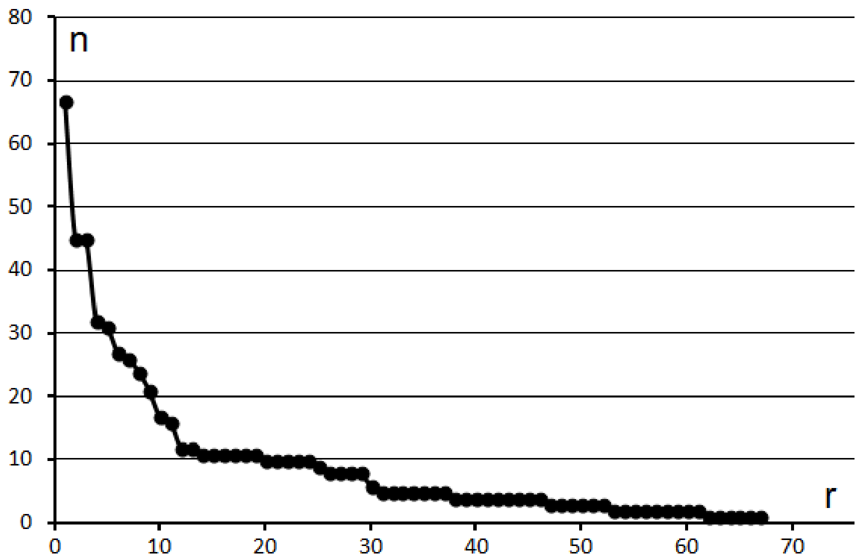


Рис. 11.2. Зависимость частоты *n* понятия из СФЗ от его ранга *r*

4. Построение семантической сети. Для создания графа, визуализирующего связи между понятиями в формулах, используется ресурс Интернета *https://nocodefunctions.com.* Такая сеть для раздела «Механика» представлена на рис. 11.3. Чтобы ее получить, из файла *Formula.txt* были исключены формулы, не относящиеся к механике, и удалены слова, обозначающие математические операции: «равно», «сложить», «вычесть», «делить», «возвести в квадрат», «извлечь корень» и т. д. (см. Приложение к гл. 11). Если это не сделать, то в семантической сети появятся вершины, соответствующие этим понятиям. Для того чтобы программа лучше отличала понятия, входящие в одну формулу, от понятий из другой, описания формул оформляют в виде отдельных предложений (первое слово – с заглавной буквы, в конце – точка), а между ними вставляют последовательность из 10–12 стоп-слов, на которые программа не реагирует и не включает в семантическую сеть («который» или «однако»).

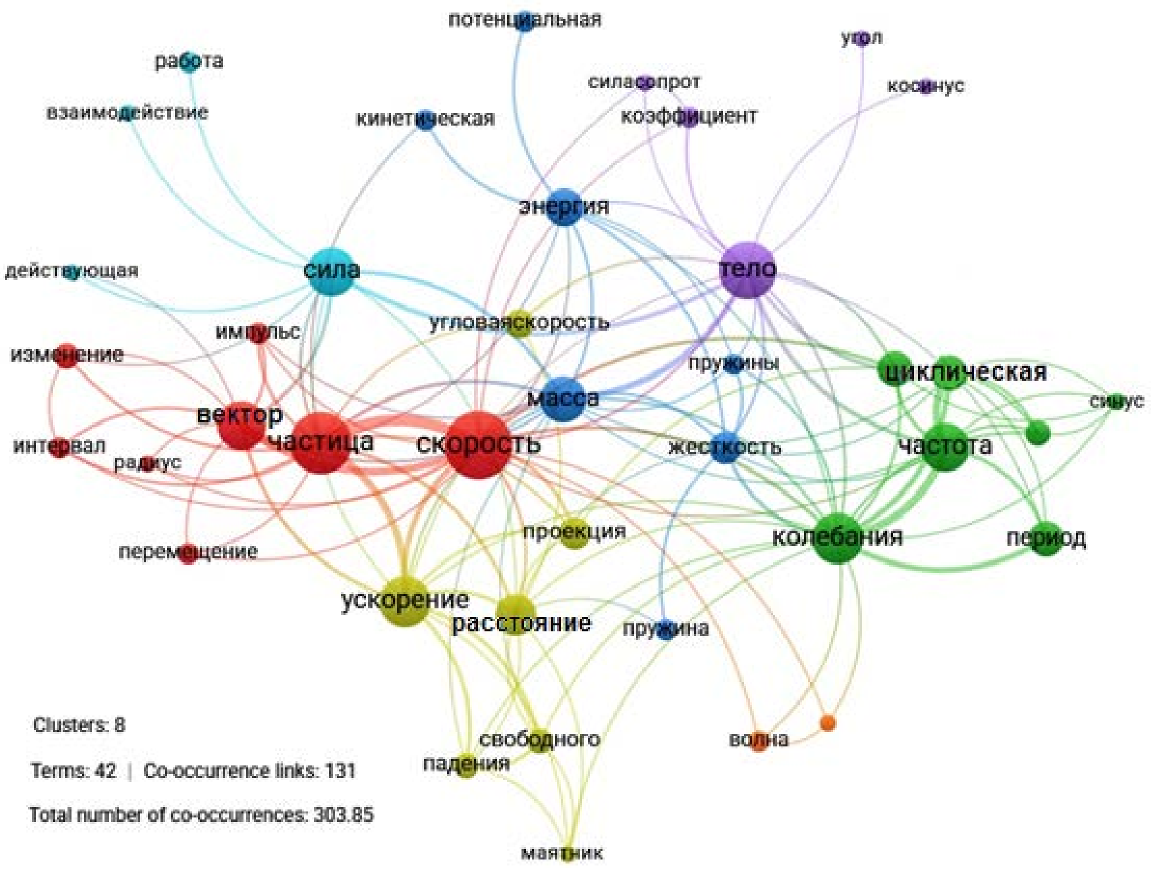


Рис. 11.3. Семантическая сеть из понятий, входящих в формулы по механике

В настройках следует выбрать опции: 1) учитывать слова из 3 и более букв (чтобы не потерять понятия «ток», «газ»); 2) исключить слова, встречающиеся 1 раз; 3) максимальная длина n-grams – одно слово. Запуск программы для формул по механике (включая статику, механические колебания и волны) дает результат, представленный на рис. 11.3. Видно, что программа выделила 42 термина (среди них не только физические величины, но и понятия, обозначающие объекты и явления), из которых получилось 8 кластеров; общее количество связей – 131. Размер кружков (вершин) пропорционален частоте упоминания понятий; ширина изогнутых линий пропорциональна силе связей.

Применение рассмотренного выше метода позволило получить семантическую сеть для понятий, составляющих систему формульных знаний всего школьного курса физики (рис. 11.4 и 11.5). Полный граф состоит из 119 вершин (понятия, упоминаемые только один раз, не учитывались), между ними 457 связей; всего 16 кластеров, они показаны разными цветами.

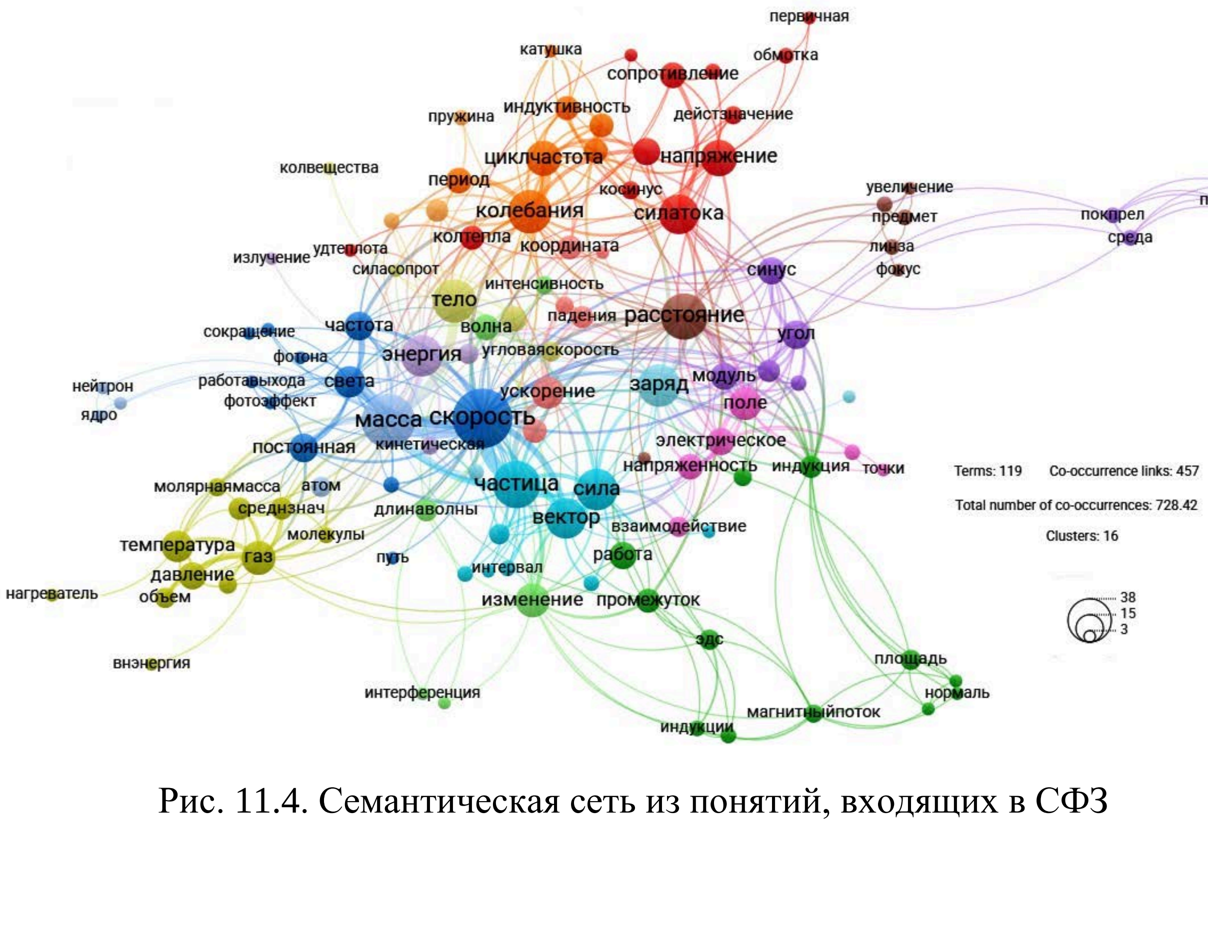


Рис. 11.4. Семантическая сеть из понятий, входящих в СФЗ

Визуализация семантического пространства формульных знаний позволяет по-новому взглянуть на их структуру, выявить скрытые взаимосвязи между различными концептами. Это способствует более глубокому пониманию СФЗ как одной из составляющих ментального пространства «идеального ученика» (то есть ученика, запоминающего всю сообщаемую информацию). В ментальном пространстве реального ученика некоторые вершины и связи представлены слабее или отсутствуют, что затрудняет усвоение новых знаний.

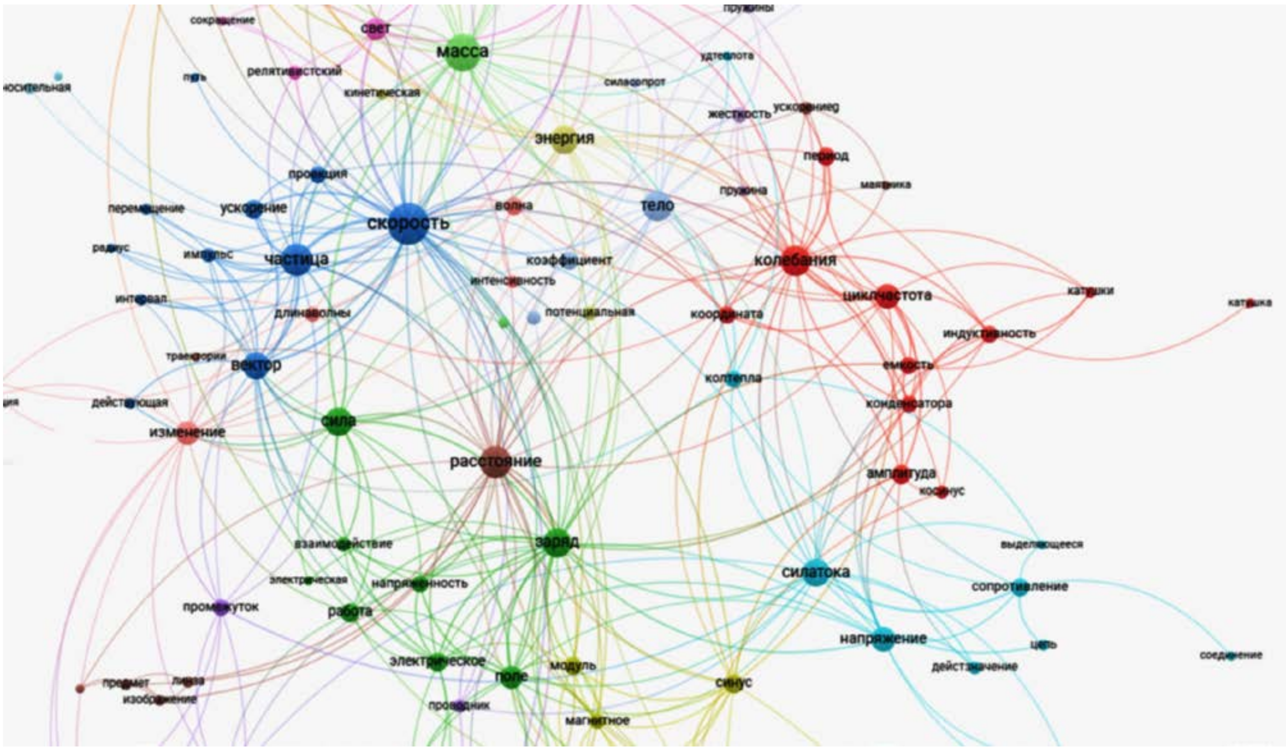


Рис. 11.5. Фрагмент семантической сети из понятий, входящих в СФЗ

5. Получение матрицы близости между понятиями. Система формульных знаний по физике состоит из 148 формул; они содержат 37 ключевых понятий. Перед анализом файла *Formula.txt* в нем производят следующие замены: 1) чтобы не путать с термином «сила», термин «сила тока» заменяют на «сллатока», а «оптическая сила» – на «оптсила»; 2) вместо слов «радиус», «диаметр», «длина» используют термин «расстояние». Для получения матрицы близости используется компьютерная программа ПР-4 (Приложение к гл. 11), которая читает файл *Formula.txt*, последовательно перебирает все формулы от $i=1$ до $N=148$, определяя количество вхождений понятий А, В, С, … в каждую из них. В результате для каждого понятия вычисляется контекстный вектор – одномерная матрица $\vec{a}(a_1, a_2, ..., a_N)$, элементами которой являются количества вхождений a_i понятия А в *i*-ю формулу школьного курса физики.

Косинусная мера близости $K(A,B)$ понятий А и В вычисляется как косинус угла между векторами $\vec{a}(a_1, a_2, ..., a_N)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, ..., b_N)$ в N-мерном контекстном пространстве [4; 10; 120]. Результаты для каждого понятия записываются в файл *Vihod.txt* в виде столбца чисел, а затем переносятся в *Excel*. Получившаяся матрица близости 37 × 37 позволяет рассчитать матрицу расстояний по формуле $L(A,B)=1/(K(A,B)+0{,}01)-0{,}99$. Она составлена так, что при *K*= 1 (максимальная близость) расстояние L = 0, а при *K* = 0 расстояние L = 99.

6. Кластеризация понятий. С помощью компьютерной программы, использующей матрицу расстояний, можно осуществить кластеризацию рассматриваемых объектов (понятий) [25; 120]. Алгоритм состоит в следующем:

1) сначала считают, что каждый *i*-й объект является отдельным кластером с весом $m_i=1$;

2) находят два наиболее близких кластера K_i и K_j;

3) объединяют их в один новый кластер $K_{i,j}$ с весом $m_{i,j}=m_i+m_j$;

4) вычисляют расстояние от нового кластера $K_{i,j}$ до остальных кластеров, учитывая веса K_i и K_j:

$$L(K_{i\,j}, K_r) = \frac{m_i L(K_i, K_r) + m_j L(K_j, K_r)}{m_i + m_j}, \;\; r = 1 \ldots N \text{ кроме } i \text{ и } j;$$

очевидно, что $L(K_{i\,j}, K_{i\,j}) = 0$;

5) если число кластеров больше, чем требуется, то возвращаются к операции 2, а иначе – заканчивают кластеризацию.

На рис. 11.6.1 представлена **дендрограмма кластеризации** 12 ключевых понятий, входящих в формулы из раздела «Механика». Можно выделить три кластера: 1) время, расстояние, скорость, частица, ускорение, проекция; 2) масса, сила, вектор; 3) колебания, волна, энергия. В некоторых случаях $L(A,B)<1$, $\ln(L(A,B))<0$. Поэтому для вычисления расстояний между вершинами графа на рис. 11.6.2 применяется формула $l(A,B)=\ln(L(A,B)+1)$.

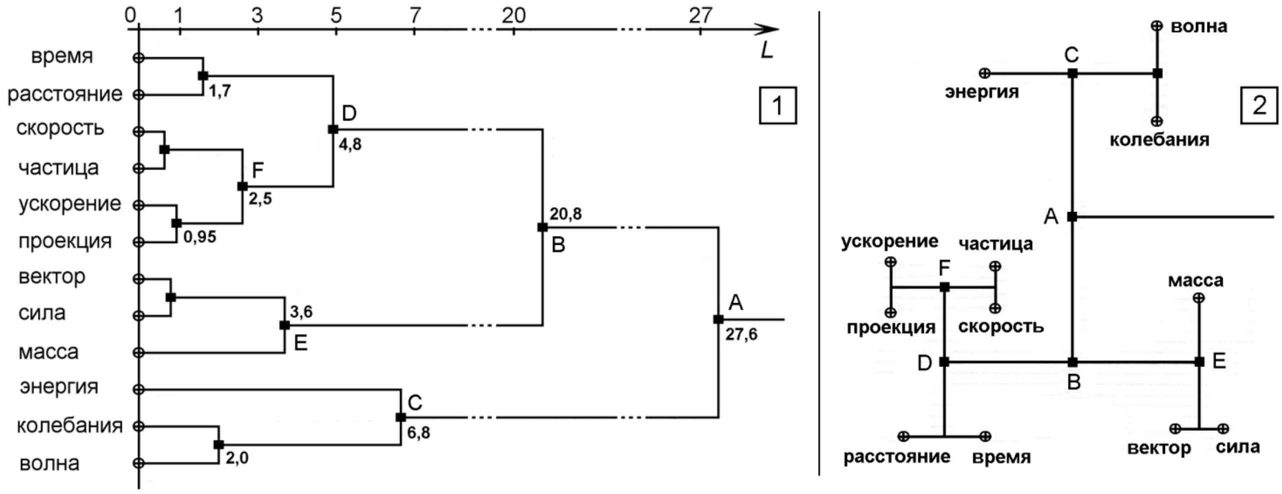


Рис. 11.6. Кластеризация величин, входящих в формулы по механике

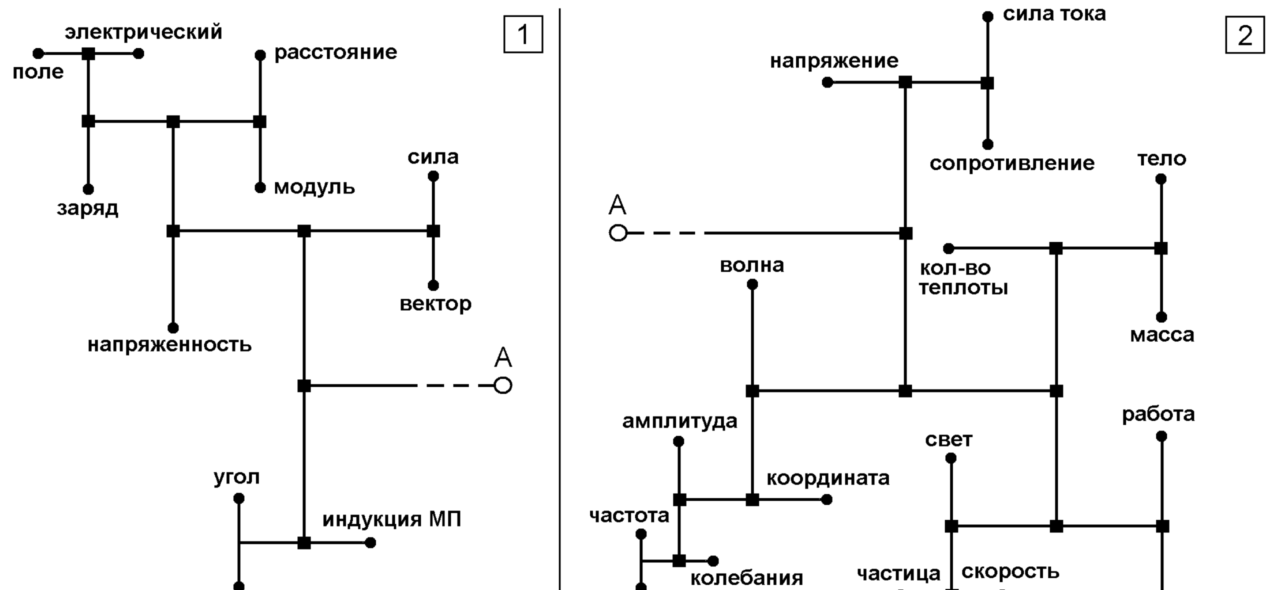


Рис. 11.7. Результаты кластеризации понятий, входящих в СФЗ

Применение специальной компьютерной программы к матрице расстояний для 36 наиболее часто используемых понятий всего курса физики позволило выявить следующие кластеры: 1) частица, скорость, свет, изменение, энергия, работа; 2) тело, масса, количество теплоты; 3) газ, молекула, температура, давление; 4) колебания, частота, циклическая частота, амплитуда, координата, волна; 5) поле, заряд, электрический, расстояние, модуль, напряженность, сила, вектор; 6) угол, синус, индукция магнитного поля; 7) сила тока, напряжение, сопротивление. Три понятия оказались слабо связаны с другими и в этот список не вошли. Расстояния между вершинами графа на рис. 11.7 рассчитаны по формуле $l(A,B)=\ln(10L(A,B))$. Точки A на рис. 11.7.1 и 11.7.2 совпадают.

* * * * *

Цифровая гуманитаристика открывает новые перспективы для изучения методики обучения физике. Анализ текстов учебников, автоматическая обработка информации и визуализация результатов позволяют установить закономерности, которые невозможно выявить иным способом. Использовались следующие методы исследования системы формульных знаний курса физики: 1) перечисление формул в порядке их изучения; 2) выявление ключевых понятий, обозначающих часто используемые физические величины; 3) построение графа «формулы – величины» и определение его параметров; 4) изучение семантических связей между понятиями, входящими в формулы; 5) вычисление меры близости и семантического расстояния между часто используемыми понятиями; 6) кластеризация понятий, входящих в формулы соответствующего раздела или всего курса физики. Перспективы дальнейших исследований в этом направлении связаны с расширением объема анализируемых данных и сопоставлении результатов, полученных для различных учебников.

12. СЛОЖНОСТЬ ФОРМУЛ ШКОЛЬНОГО КУРСА ФИЗИКИ

Определение сложности различных дидактических объектов (учебных текстов, формул, рисунков и т. д.) является одной из актуальных проблем теории обучения. От результатов оценки сложности учебного материала зависит когда, сколько времени и по какой методике будет изучаться тот или иной вопрос. «Измерение» сложности решения физических задач (ФЗ) позволит расположить их в порядке возрастания трудности выполнения и правильно оценивать работы учеников на контрольных работах и олимпиадах [9; 82; 106]. Для решения этой проблемы необходимо: 1) оценить семантическую сложность формул или соответствующих им теоретических положений; 2) определить сложность методов решения задач по различным разделам физики. Предлагаемый подход опирается на работы следующих ученых: Г. А. Балл [8], А. Н. Лазарев и М. В. Чистяков [43] (теория учебных задач); В. С. Бабаев, М. В. Кулагина и Ю. Ю. Шкитина [7], А. В. Гидлевский [19], О. Э. Наймушина и Б. Е. Стариченко [82], И. С. Наумов и В. С. Выхованец [83] (сложность учебных заданий); Н. Б. Самсонов, Е. В. Чмыхова и Д. Г. Давыдов [98] (сложность учебных текстов); Е. Я. Таршис [105] (метод контент-анализа).

1. Обсуждение проблемы. При оценке сложности текстов и формул школьного курса физики [79; 80] в качестве единицы измерения семантической информации удобно взять информационную емкость «простых» слов, хорошо известных пятикласснику и входящих в его тезаурус Z_5: человек, вода, воздух, расстояние, время и т. д. Тогда семантическая сложность абстрактного понятия Π относительно тезауруса Z_5 будет равна наименьшему количеству «простых» слов из Z_5, которые позволяют объяснить понятие Π [72].

Для определения семантической сложности решения ФЗ требуется оценить сложность физических понятий, обозначающих физические объекты, явления, величины и константы. При введении физической величины новая абстракция $(k+1)$-го уровня определяется на основе ранее введенных абстракций k-го уровня. Например, в теме «Кинематика» (рис. 12.1) основными являются понятия: время t, координата x, путь s, радиус-вектор $\vec{r}$, угол поворота φ, а также оператор Δ (изменение). С их помощью дают определения таким понятиям, как: перемещение $\Delta\vec{r}$, вектор скорости $\vec{\upsilon}$, его модуль υ и проекция υ_x, вектор ускорения $\vec{a}$, угловая скорость $\vec{\omega}$, период T и частота вращения ν. Очевидно, что понятие «перемещение» проще понятия «скорость», а «скорость» проще понятия «ускорение»: S(перемещение) < S(скорость) < S(ускорение). Так как «ускорение равно отношению изменения скорости ко времени», то относительно тезауруса Z_5 пятиклассника S(ускорение) ≈ S(скорость) + 4. Из аналогичных рассуждений S(скорость) ≈ S(перемещение) + 4. В результате *ДС* этих понятий равна: перемещение – 4, скорость – 8, ускорение – 12.

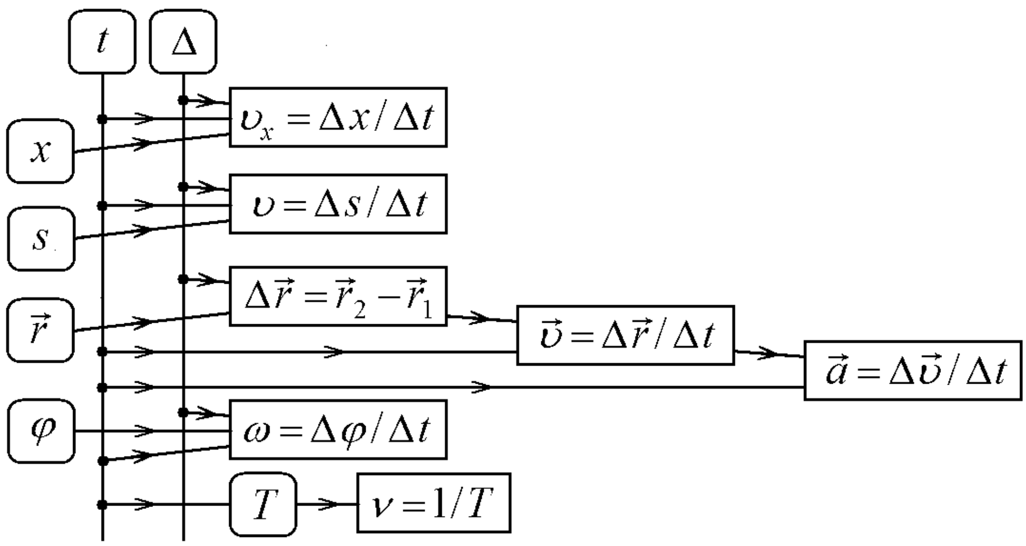
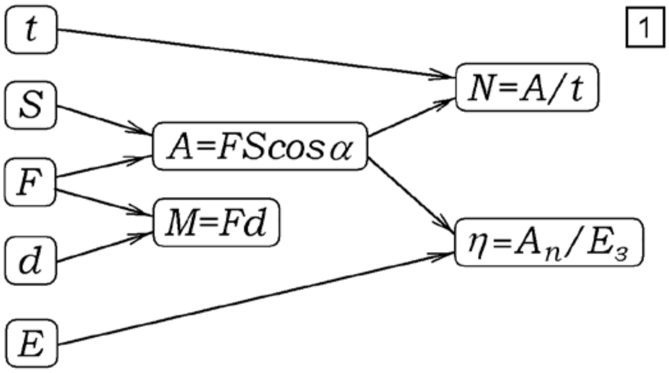


Рис. 12.1. Определения понятий по теме «Кинематика»

Построим другие цепочки понятий. Используя такие основные понятия как время t, расстояние d, перемещение S, сила F, энергия E, можно сформулировать определения момента сил M, работы A, мощности N и КПД η (рис. 12.2). Очевидно, что понятие «сила» проще понятия «работа», а «работа» проще понятия «мощность»: S(сила) < S(работа) < S(мощность). Работа силы $A = FS\cos\alpha$ (рис. 12.2), поэтому S(работа силы) $\approx$ S(сила) + S(перемещение) + S(косинус угла) + S(умножить).

Если мы хотим объяснить понятие «работа силы» попроще, то получится так: $A = FS$. Значит: S(работа силы) > S(сила) + S(перемещение) + 1 (это нижняя граница *ДС*). Так как «энергия системы – работа, которую может совершить система», то S(энергия) $\approx$ S(работа) + 4. Для понятия «мощность» получаем: S(мощность) $\approx$ S(работа силы) + S(время) + 2 > S(сила) + S(перемещение) + 3. Можно записать иначе: S(мощность) $\approx$ S(энергия) + S(время) + 2 $\approx$ S(сила) + S(перемещение) + 7. Учитывая количества слов в определениях и сравнивая понятия друг с другом, можно прийти к выводу, что их сложности равны [61; 72]: время – 2, расстояние – 2, перемещение – 3, сила – 6, момент сил – 9, работа – 14, мощность – 19. Результаты оценивания формул были сведены в таблицу *Excel*, фрагмент которой представлен на рис. 12.2.2. В ней представлены семантическая сложность SC формулы, объем V (число значащих слов) и $КСИ$.



2

№	ФОРМУЛЫ	SC	V	КСИ
Метод 4				
14	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$	31	11	2,8
15	$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$	45	14	3,2
...	...	...	...	...
22	$F_c = k_2 \upsilon^2$	36	8	4,5
Метод 5				

Рис. 12.2. Связь понятий и формул. Фрагмент таблицы с формулами

Интенсивностью волны называется энергия, переносимая волной через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно лучу, за единицу времени. Получается: S(интенсивность) > S(энергия) + S(площадь) + + S(время) + S(волна) + S(луч) + 10. Интегральная светимость – суммарная энергия, излучаемая единицей площади поверхности тела по всем частотам и направлениям за единицу времени. Поэтому: S(интегральная светимость) > > S(энергия) + S(площадь) + S(время) + S(волна) + S(частота) + 9. Дифференциальная светимость – отношение энергии в узком интервале частот, излучаемой единицей площади поверхности тела за единицу времени, к ширине этого интервала. Получаем: S(дифф. светимость) > S(энергия) + S(площадь) + S(время) + + S(частота) + S(волна) + 13 (нижняя граница).

Возможен иной подход. Как следует из **общей теории систем,** любая формула – это система, состоящая из взаимосвязанных элементов: букв, обозначающих физические величины, и математических символов. Семантическая сложность SC формулы определяется [61]: 1) количеством величин и связей между ними, то есть числом букв и математических символов; 2) сложностью составляющих ее математических операций и физических величин. Для определения семантической сложности формулы используется следующий метод: 1) создают файл *Formula.txt*, в котором формулы закодированы вербально, то есть представлены в виде предложений: $W = CU^2/2$ – «энергия конденсатора равна емкость умножить на напряжение квадрат делить на число»; 2) оценивают сложность терминов, входящих в формулы, и записывают результаты в файл *Slovar.txt*; 3) с помощью специальной компьютерной программы, написанной в *ABCPascal*, обращающейся к файлу *Slovar.txt*, анализируют файл *Formula.txt* и определяют суммарную сложность всех терминов, составляющих описание формулы. При этом учитывают, что при каждом повторном использовании некоторого символа его сложность уменьшается на 30 %. Если понятие со сложностью SC_1 встречается 4 раза, то суммарная сложность его использования равна $SC_1(1+0{,}7+\ 0{,}7^2+0{,}7^3)\approx 2{,}53SC_1$.

Для определения семантической сложности формулы, выражающей функциональную зависимость (например, $E_к + E_п = const$), формулу заменяют фактуальным положением («если в системе действуют только консервативные силы, то сумма кинетической энергии и потенциальной энергии равна константе») и определяют сумму семантических сложностей всех составляющих его терминов [72]. При оценке семантической сложности определения некоторой физической величины X сложность термина, обозначающего величину X, считается равной 1. Например, в предложении «емкость конденсатора – это отношение заряда конденсатора к напряжению на пластинах» семантическая сложность слова «емкость» принимается равной 1. Это логично, так как данное предложение содержит повтор: до и после тире речь идет о емкости конденсатора. Иной подход (когда мы считаем, что S(емкость)$\approx$15) приведет к тому, что семантическая сложность определения (а значит, и формулы $C = q/U$) будет завышена почти в 2 раза. При определении количества слов в предложении (то есть объема информации V), соответствующем формуле, счету подлежат все слова, включая определяемый термин.

Из аналогичных соображений сложность любого коэффициента пропорциональности (*G*, *k*, ρ и др.) считается равной пяти. Рассмотрим формулу $F = Gm_1m_2/r^2$. Если выразить гравитационную постоянную ($G = Fr^2/m_1m_2$) и определить ее сложность путем подсчета суммарной сложности терминов *F*, *r*, m_1, m_2, то сложность формулы $F = Gm_1m_2/r^2$ окажется завышенной в 1,5–2 раза. Сложность чисел 2, π и т. д. принимается равной двум [61].

Оценив сложность понятий, с помощью компьютерной программы, учитывающей число понятий в определениях, можно определить *ДС* физических формул (выражающих определение величины или функциональную зависимость) рассмотренным выше методом. Результаты для 7–9 классов представлены в формате: «формула (определение (о), закон или зависимость (з), семантическая сложность *SC*, структурная сложность S_{str}, дидактическая сложность *DC*, *КСИ*)». Получилось так:

7 класс: 1) $\upsilon = s/t$ (о; 9; 1,2; 10; 1,5); 2) $\rho = m/V$ (о; 10; 1,4; 14; 1,4); 3) $F_{упр} = -k\Delta l$ (з; 27; 1,7; 45; 3,9); 4) $F_{тяж} = mg$ (з; 29; 1,3; 38; 4,1); 5) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (о; 23; 1,6; 37; 2,9); 6) $p = F/S$ (о; 15; 1,6; 24; 2,1); 7) $p = \rho g h$ (з; 33; 1,8; 59; 3,7); 8) $F_{арх} = \rho g V_{пчт}$ (з; 38; 1,9; 70; 3,5); 9) $A = F\,S$ (о; 14; 1,4; 19; 2,3); 10) $N = A/t$ (о; 22; 1,4; 32; 3,7); 11) $F_1/F_2 = l_1/l_2$ (з; 26; 1,3; 33; 2,9); 12) $M = F\,l$ (о; 14; 1,2; 16; 2,3); 13) $\eta = A_п / A_з$ (о; 29; 1,5; 42; 4,1); 14) $E_п = m g h$ (о; 26; 1,90; 49; 2,4); 15) $E_к = m\upsilon^2/2$ (о; 22; 1,9; 41; 2).

8 класс: 1) $Q = cm(t_2 - t_1)$ (з; 35; 2,1; 73; 3,2); 2) $Q = qm$ (з; 24; 2,0; 48; 2,4); 3) $E = E_к + E_п$ (о.; 35; 2,0; 71; 3,9); 4) $Q = \lambda m$ (з; 25; 1,95; 49; 2,3); 5) $\varphi = \rho/\rho_0$ (о; 37; 1,8; 68; 3,4); 6) $Q = Lm$ (з; 26; 2,1; 55; 2,6); 7) $\eta = A_п/Q_1 = Q_1 - Q_2/Q_1$ (о; 36; 1,7; 60; 4,5); 8) $q_1 + q_2 + ... + q_n = const$ (з; 30; 1,6; 48; 3,3); 9) $I = q/t$ (о; 26; 1,4; 35; 3,3); 10) $U = A/q$ (о; 37; 1,6; 59; 5,3); 11) $I = U/R$ (з; 60; 1,7; 101; 8,6); 12) $R = \rho l/S$ (з; 53; 2,1; 110; 5,3); 13) последовательное соединение $R = R_1 + R_2$, $U = U_1 + U_2$ (з; 85; 2,5; 208; 7,7); 14) параллельное соединение $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$, $I = I_1 + I_2$ (з; 96; 2,1; 198; 4,6); 15) $A = UIt$ (з; 62; 1,5; 91; 6,9); 16) $P = UI$ (з; 61; 1,4; 85; 8,7); 17) $Q = I^2RT$ (з; 56; 1,8; 100; 5,1); 18) $C = q/U$ (о; 39; 1,6; 63; 6,5); 19) $W = CU^2/2$ (о; 71; 1,8; 130; 7,9); 20) $\alpha = \beta$ (з; 15; 1,2; 18; 2,1); 21) $\sin\alpha/\sin\beta = n$ (з; 40; 1,7; 68; 3,3); 22) $D = 1/F$ (з; 13; 1,6; 20; 1,9).

9 класс: 1) $\vec{\upsilon} = \vec{s}/t$, $s_x = \upsilon_x t$ (о; 26; 1,5; 39; 3,3); 2) $\vec{a} = (\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0)/t$ (о; 28; 1,7; 47; 2,6); 3) $s_x = \upsilon_{0x} t + a_x t^2/2$ (з; 50; 2,0; 99; 3,3); 4) $\vec{a} = \vec{F}/m$ (з; 34; 1,3; 45; 4,3); 5) $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (з, 22; 1,1; 24; 3,7); 6) $s_x = (\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2)/2a_x$ (з; 56; 2,1; 119; 3,5); 7) $F = Gm_1 m_2/r^2$ (з; 59; 2,1; 127; 4,9); 8) $a = \upsilon^2/R$ (з; 33; 2,0; 65; 3,7); 9) первая космическая скорость $\upsilon_1 = \sqrt{GM_з/(R_з + h)}$ (з, 58; 2,1; 122; 3,2); 10) $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ (о; 21; 1,5; 31; 2,6); 11) в замкнутых системах $m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2 = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$ (з; 57;

2,1; 121; 2,7); 12) в консервативных системах $mgh_1 + m\upsilon_1^2/2 = mgh_2 + m\upsilon_2^2/2$ (з; 75; 2,2; 166; 2,8); 13) $T = 1/\nu$ (з; 21; 1,4; 29; 3,5); 14) $\lambda = \upsilon T$ (з; 35; 1,4; 48; 5,0); 15) $\upsilon = \lambda / T$ (з; 35; 1,4; 49; 5,0); 16) $B = F / I\,l$ (з; 65; 1,7; 107; 5,4); 17) $E = Li^2/2$ (з; 64; 1,7; 111; 5,8); 18) $U_1/U_2 = N_1/N_2$ (з; 54; 1,9; 105; 4,5); 19) $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (з; 68; 2,1; 142; 5,2); 20) $E = h\nu$ (з; 41; 1,6; 66; 5,1); 21) $\sin\alpha / \sin\beta = n_{21} = \upsilon_1/\upsilon_2$ (з; 59; 1,9; 111; 3,1); 22) $n = c/\upsilon$ (з; 34; 1,6; 55; 2,8); 23) $h\nu = E_1 - E_2$ (з; 56; 1,7; 93; 5,1); 24) $\Delta E = \Delta mc^2$ (з; 41; 1,8; 73; 4,1); 25) $\Delta m = Zm_p + Nm_n - M_я$ (з; 124; 1,8; 226; 6,5); 26) поглощенная доза излучения $D = E/m$ (з; 35; 1,7; 58; 3,9); 27) эквивалентная доза $H = DK$ (з; 31; 2,1; 64; 3,4); 28) закон Хаббла $\upsilon = H\,R$ (з; 25; 1,9; 47; 3,1). Здесь $КСИ$ – коэффициент свернутости информации, то есть отношение количества семантической информации к числу слов в описании формулы (объему соответствующего предложения).

Обсуждая решение задач в 10–11 классах, учтем, что школьник на уроках овладевает различными методами, каждый из которых представляет собой совокупность приемов, соответствующих той или иной теме. В ФЗ, относящихся к одной теме, используются примерно одни и те же физические модели, понятия, теоретические идеи и формулы. Задачи по темам «Равноускоренное движение», «Поверхностное натяжение», «Теория атома водорода» и т. д. решаются разными способами, предполагающими применение различных физических идей, моделей, законов и формул. **Сложностью метода** CM_{ij} будем называть среднюю сложность формул, входящих в *j*-ю тему *i*-го раздела курса физики и составляющих сущность данного метода.

Ниже представлены результаты оценки сложности методов решения ФЗ и семантической сложности SC формул, изучаемых в 10–11 классах. При этом указан их объем V и коэффициент свернутости информации $КСИ$. Используется следующий формат: «формула (определение (о), закон или зависимость (з); SC; V; $КСИ$)»:

Раздел 1. МЕХАНИКА

1. Равномерное движение (число формул $F_{11} = 4$, сложность метода $CM_{11} \approx 39$): 1) скорость $\vec{\upsilon} = d\,\vec{r}\,/\,dt$ (о; 22; 11; 2,0); 2) при равномерном движении $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}\,t$ (з; 36; 13; 2,8); 3) при равномерном движении $x = x_0 + \upsilon_{0x}t$ (з; 32; 12; 2,7); 4) «вектор скорости точки относительно земли равен сумме вектора скорости точки относительно системы отсчета и вектора скорости системы отсчета относительно земли»: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ (з; 65; 21; 3,1). **2. Равноускоренное движение** ($F_{12} = 4$, $CM_{12} \approx$ 49): 5) ускорение $\vec{a} = \Delta\vec{\upsilon}\,/\,\Delta t$ (о; 24; 11; 2,2); 6) при равноускоренном движении $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} + \vec{a}t$ (з; 50; 15; 3,3); 7) при равноускоренном движении скорость $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$ (з; 54; 15; 3,6); 8) при равноускоренном движении $x = x_0 + \upsilon_{0x}t + a_x t^2/2$ (з; 66; 22; 3,0). **3. Движение по окружности** ($F_{13} = 5$, $CM_{13} \approx 23$): 9) при равномерном движении по окружности $a = \upsilon^2/R$ (з; 37; 12; 3,1); 10) угловая скорость $\omega = \Delta\varphi\,/\,\Delta t$ (о; 13; 9; 1,4); 11) угловая скорость $\omega = 2\pi\,/\,T$ (з; 20; 9; 2,2); 12) угловая скорость $\omega = 2\pi\nu$ (з; 20; 9; 2,2); 13) скорость $\upsilon = \omega R$ (з; 23; 10; 2,3). **4. Законы Ньютона. Силы в механике** ($F_{14} = 9$, $CM_{14} \approx 35$): 14) равнодействующая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$ (о; 31; 11; 2,8); 15) $m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$ (з; 45; 14; 3,2); 16) для двух взаимодействующих тел $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (з; 25; 9; 2,8); 17) сила гравитационного взаимодействия $F = Gm_1m_2\,/\,r^2$ (з; 58; 16; 3,6); 18) сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ (з; 26; 9; 2,9); 19) сила упругости $F_{упр,x} = -k\,x$ (з; 27; 8; 3,4); 20) сила трения $F_{тр} = \mu N$ (з; 25; 10; 2,5); 21) сила сопротивления $F_c = k_1\upsilon$ (з; 40; 10; 4,0); 22) при больших скоростях сила сопротивления $F_c = k_2\upsilon^2$ (з; 42, 11, 3,8). **5. Импульс и его изменение** ($F_{15} = 3$, $CM_{15} \approx 35$): 23) импульс тела $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ (о; 21; 8; 2,6); 24) изменение импульса тела $\Delta\vec{p}=\vec{F}\Delta t$ (з; 37; 10; 3,7); 25) для замкнутой системы $m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2+m_3\vec{\upsilon}_3+...=const$ (з; 47; 14; 3,4). **6. Работа, энергия, мощность** ($F_{16}=8$, $CM_{16}\approx 44$): 26) работа силы $A=FS\cos\alpha$ (о; 32; 13; 2,5); 27) мощность двигателя $N=\Delta A/\Delta t$ (о; 21; 7; 3,0); 28) кинетическая энергия тела $E_к=m\upsilon^2/2$ (о; 22; 10; 2,2); 29) работа всех сил $A=\Delta E_к$ (з; 41; 8; 5,1); 30) работа силы тяжести $A=-\Delta E_п=mgh_1-mgh_2$ (з; 77; 26; 3,0); 31) потенциальная энергия поднятого тела $E_п=mgh$ (з; 37; 11; 3,4); 32) потенциальная энергия деформированной пружины $E_п=k\Delta l^2/2$ (з; 39; 10; 3,9); 33) если в системе действуют только консервативные силы, то $E=E_к+E_п=const$ (з; 79; 15; 5,3). **7. Равновесие тел** ($F_{17}=3$, $CM_{17}\approx 29$): 34) центр масс в равновесии, если $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+...=0$ (з; 12; 6; 2,0); 35) момент силы $M=\pm Fd$ (о; 38; 12; 3,2); 36) тело в равновесии, если $M_1+M_2+M_3+...=0$ (з; 36; 12; 3,0). **8. Механические колебания** ($F_{18}=6$, $CM_{18}\approx 54$): 37) для пружинного маятника $x''=-(k/m)x$ (з; 105; 14; 7,5); 38) при гармонических колебаниях $x=x_m\cos(\omega t)$ (з; 35; 12; 2,9); 39) собственная частота колебаний $\omega_0=\sqrt{k/m}$ (з; 38; 11; 3,5); 40) период колебаний пружинного маятника $T=2\pi\sqrt{m/k}$ (з; 44; 14; 3,1); 41) период колебаний нитяного маятника $T=2\pi\sqrt{l/g}$ (з; 39; 16; 2,4); 42) энергия колебаний пружинного маятника $W=kx_m^2/2=m\upsilon_m^2/2$ (з; 64; 20; 3,2). **9. Механические волны** ($F_{19}=4$, $CM_{19}\approx 50$): 43) длина волны $\lambda=\upsilon T=\upsilon/\nu$ (з; 48; 12; 4,0); 44) уравнение волны $s=s_m\sin(\omega(t-x/\upsilon))$ (з; 45; 16; 2,8); 45) интенсивность волны $I=\Delta W/S\Delta t$ (о; 30; 10; 3,0); 46) интенсивность волны $I=wc$ (з; 75; 8; 9,4).

Раздел 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

1. Количество вещества, число атомов (число формул $F_{21}=3$, сложность метода $CM_{21}\approx 44$): 1) относительная молекулярная (атомная) масса

$M_r = m_0/(m_{0C}/12)$ (о; 52; 12; 4,3); 2) количество вещества $\nu = N/N_A$ (о; 29; 8; 3,6); 3) молярная масса $M = m_0 N_A$ (о; 50; 9; 5,6); **2. Основное уравнение МКТ, энергия молекул** ($F_{22} = 6$, $CM_{22} \approx 56$): 4) давление идеального газа $p = (1/3) m_0 n < \upsilon^2 >$ (з; 62; 14; 4,4); 5) средняя кинетическая энергия $\overline{E} = m_0 < \upsilon^2 > /2$ (о; 51; 15; 3,4); 6) давление $p = (2/3) n\overline{E}$ (з; 63; 11; 5,7); 7) средняя кинетическая энергия $\overline{E} = 3kT/2$ (з; 56; 13; 4,3); 8) давление $p = nkT$ (з; 43; 10; 4,3); 9) средняя квадратическая скорость $\upsilon_{ср.кв.} = \sqrt{3kT/m_0}$ (з; 63; 16; 3,9); **3. Уравнение состояния газа. Изопроцессы** ($F_{23} = 4$, $CM_{23} \approx 40$): 10) для идеального газа $pV = (m/M)RT$ (з; 73; 15; 4,9); 11) для изотермического процесса $pV = const$ (з; 23; 8; 2,88); 12) для изобарного процесса $V/T = const$ (з; 32; 9; 3,6); 13) для изохорного процесса $V/T = const$ (з; 32; 9; 3,6); **4. Влажность воздуха** ($F_{24} = 2$, $CM_{24} \approx 34$): 14) относительная влажность $\varphi = p/p_{н.п.}$ (о; 37; 13; 2,9); 15) относительная влажность $\varphi = \rho/\rho_{н.п.}$ (о; 30; 12; 2,5); **5. Поверхностное натяжение** ($F_{25} = 2$, $CM_{25} \approx 31$): 16) сила поверхностного натяжения $F_{пн} = \sigma l$ (з; 28; 12; 2,3); 17) энергия поверхностного натяжения $W = \sigma S$ (з; 33; 9; 3,7); **6. Работа, внутренняя энергия. Первое начало термодинамики**

($F_{26} = 3$, $CM_{26} \approx 58$): 18) внутренняя энергия $U = (3m/2M)RT$ (з; 88; 16; 5,5); 19) работа газа $A = p\Delta V$ (з; 34; 7; 4,9); 20) изменение внутренней энергии $\Delta U = A + Q$ (з; 52; 9; 5,8); **7. Количество теплоты. Теплообмен, плавление** ($F_{27} = 4$, $CM_{27} \approx 30$): 21) количество теплоты при нагревании $Q = cm\Delta T$ (з; 34; 11; 3,1); 22) количество теплоты при парообразовании $Q = Lm$ (з; 32; 8; 4,0); 23) количество теплоты при плавлении $Q = \lambda m$ (з; 29; 8; 3,6); 24) количество теплоты при теплообмене $Q_1 + Q_2 + ... + Q_N = 0$ (з; 26; 10; 2,6); **8. Тепловой двигатель, КПД** ($F_{28} = 2$, $CM_{28} \approx 37$): 25) КПД теплового двигателя $\eta = A/Q$ (о;

33; 8; 4,1); 26) КПД идеального теплового двигателя $\eta = (T_H - T_X)/T_H$ (з; 42; 12; 3,5).

Раздел 3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Электростатика, напряженность, потенциал ($F_{31} = 9$, $CM_{31} \approx 42$): 1) в электрически изолированной системе $q_1 + q_2 + q_3 = const$ (з; 28; 9; 3,1); 2) сила Кулона $F = kq_1q_2/r^2$ (з; 39; 11; 3,6); 3) напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{F}/q$ (о; 20; 10; 2,0); 4) при наложении нескольких электрических полей $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ (з; 61; 13; 4,7); 5) напряженность электрического поля точечного заряда $E = kq/r^2$ (з; 55; 10; 5,5); 6) потенциальная энергия взаимодействия заряда и электрического поля $W = qEd$ (з; 63; 8; 7,9); 7) потенциал электрического поля $\varphi = W/q$ (о; 28; 8; 3,5); 8) напряжение между точками электрического поля $U = \varphi_1 - \varphi_2$ (о; 31; 5; 6,2); 9) напряженность электрического поля $E = U/d$ (з; 56; 7; 8,0); **2. Конденсатор, электроемкость** ($F_{32} = 5$, $CM_{32} \approx 57$): 10) емкость конденсатора $C = q/U$ (о; 36; 6; 6,0); 11) емкость конденсатора $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$ (з; 61; 12; 5,1); 12) энергия конденсатора $W = CU^2/2$ (з; 78; 9; 8,7); 13) при параллельном соединении конденсаторов $C = C_1 + C_2$ (з; 51; 8; 6,4); 14) при последовательном соединении конденсаторов $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ (з; 60; 14; 4,3); **3. Цепи постоянного тока** ($F_{33} = 10$, $CM_{33} \approx 62$): 15) сила тока $I = q/t$ (о; 18; 7; 2,6); 16) сила тока $I = q\upsilon nS$ (з; 68; 13; 5,2); 17) сопротивление $R = U/I$ (о; 49; 7; 7,0); 18) сила тока $I = U/R$ (з; 76; 7; 11); 19) сопротивление $R = \rho l/S$ (з; 62; 10; 6,2); 20) при последовательном соединении резисторов $R = R_1 + R_2$ (з; 76; 9; 8,4); 21) при параллельном соединении резисторов $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ (з; 89; 14; 6,4); 22) сила тока $I = ЭДС/(R + r)$ (з; 93; 11; 8,5); 23) удельное сопротивление $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$ (з; 54; 15; 3,6); 24) масса выделяющегося вещества $m = kIt$ (з; 39; 10; 3,9); **4. Работа и мощность электрического тока** ($F_{34} = 5$, $CM_{34} \approx 54$): 25) работа тока $A = IUt$ (з; 68; 9; 7,6); 26) количество теплоты $Q = I^2Rt$ (з; 62; 10; 6,2); 27) мощность $P = A/t$ (о; 30; 6; 5,0); 28) мощность тока $P = UI = I^2R$ (з; 72; 13; 5,5); 29) электродвижущая сила $ЭДС = A/q$ (о; 37; 8; 4,6); **5. Магнитное поле. Электромагнитная индукция** ($F_{35} = 8,\ CM_{35} \approx 66$): 30) сила Ампера $F_A = I\upsilon B\sin\alpha$ (з; 59; 15; 3,9); 31) сила Лоренца $F_Л = q\upsilon B\sin\alpha$ (з; 58; 14; 4,1); 32) магнитный поток $\Phi = BS\cos\alpha$ (о; 35; 12; 2,9); 33) ЭДС индукции $ЭДС = -\Delta\Phi/\Delta t$ (з; 77; 11; 7,0); 34) ЭДС индукции $ЭДС = \upsilon Bl\sin\alpha$ (з; 81; 15; 5,4); 35) индуктивность соленоида $L = \Phi/I$ (о; 44; 7; 6,3); 36) ЭДС индукции $ЭДС = -L\Delta I/\Delta t$ (з; 95; 12; 7,9); 37) энергия катушки индуктивности $W = LI^2/2$ (з; 79; 11; 7,2); **6. Электромагнитные колебания, переменный ток** ($F_{36} = 11,\ CM_{36} \approx 75$): 38) энергия колебательного контура $W = LI^2/2 + q^2/2C$ (з; 102; 17; 6); 39) энергия колебательного контура $W = LI_m{}^2/2 = q_m{}^2/2C$ (з; 108; 19; 5,7); 40) для колебательного контура $q'' + (1/LC)q = 0$ (з; 140; 13; 11); 41) период колебаний в колебательном контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (з; 83; 13; 6,4); 42) мгновенное значение переменного тока $i = I_m\sin\omega t$ (з; 56; 15; 3,7); 43) действующее значение переменного тока $I = I_m/\sqrt{2}$ (з; 42; 10; 4,2); 44) действующее значение переменного напряжения $U = U_m/\sqrt{2}$ (з; 61; 8; 7,6); 45) полное сопротивление переменному току $Z = U/I$ (о; 54; 8; 6,8); 46) емкостное сопротивление конденсатора $X_C = 1/\omega C$ (з; 61; 10; 6,1); 47) индуктивное сопротивление конденсатора $X_L = \omega L$ (з; 65; 8; 8,1); 48) коэффициент трансформации $K = U_2/U_1$ (о; 50; 16; 3,1).

Раздел 4. ОПТИКА

1. Законы отражения и преломления ($F_{41} = 3,\ CM_{41} \approx 37$): 1) при отражении $\alpha = \beta$ (з; 18; 8; 2,3); 2) при преломлении $\sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1$ (з; 62; 19; 3,3); 3) показатель преломления $n = c/\upsilon$ (о; 30; 10; 3,0); **2. Линзы. Оптическая сила** ($F_{42} = 3,\ CM_{42} \approx 25$): 4) оптическая сила тонкой линзы $D = 1/F$ (о; 19; 8;

2,4); 5) для тонкой линзы $D = 1/d + 1/f$ (з; 32; 13; 2,5); 6) увеличение $\Gamma = H/h = |f/d|$ (о; 24; 16; 1,5); **3. Волновая оптика. Интерференция, дифракция** ($F_{43} = 3,\ CM_{43} \approx 72$): 7) максимум интенсивности при интерференции наблюдается, если $\Delta d = k\lambda,\ k \in Z$ (з; 56; 11; 5,1); 8) максимум интенсивности при интерференции наблюдается, если $\Delta d = (2k+1)\lambda,\ k \in Z$ (з; 64; 17; 3,8); 9) максимум интенсивности при дифракции на решетке, если $d \sin\varphi = k\lambda,\ k \in Z$ (з; 97; 15; 6,5).

Раздел 5. ФИЗИКА МИКРОМИРА

1. Фотоэффект, корпускулярная природа света ($F_{51} = 3,\ CM_{51} \approx 57$): 1) энергия фотона $E = h\nu$ (з; 49; 13; 3,8); 2) для фотоэффекта $h\nu = A + m\upsilon_m^2/2$ (з; 76; 17; 4,5); 3) длина волны Бройля $\lambda = h/p$ (з; 46; 10; 4,6); **2. Теория атома водорода** ($F_{52} = 2,\ CM_{52} \approx 78$): 4) энергия фотона $h\nu = E_n - E_m$ (з; 74; 13; 5,7); 5) энергия атома водорода $E_n = -k^2 me^4/(2\hbar^2 n^2)$ (з; 83; 24; 3,5); **3. Ядерные реакции** ($F_{53} = 5,\ CM_{53} \approx 63$): 6) для ядерной реакции $A_1 + A_2 = const$, $Z_1 + Z_2 = const$ (з; 75; 16; 4,7); 7) число нераспавшихся атомов $N = N_0 2^{-t/T}$ (з; 49; 15; 3,3); 8) массовое число атома $A = Z + N$ (з; 47; 9; 5,2); 9) энергия связи ядра $E_{св} = (Zm_p + Nm_n - M_я)c^2$ (з; 115; 24; 4,8); 10) удельная энергия связи ядра $E_{уд} = E_{св}/N$ (о; 55; 10; 5,5); **4. Доза излучения, эквивалентная доза излучения** ($F_{54} = 2,\ CM_{54} \approx 37$): 11) поглощенная доза излучения $D = E/m$ (о; 46; 11; 4,2); 12) эквивалентная доза поглощенного излучения $H = Dk$ (о; 28; 12; 2,3).

Раздел 6. ЧАСТНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. ЧТО: кинематика, релятивистские эффекты ($F_{61} = 3,\ CM_{61} \approx 57$): 1) длина движущегося стержня $l = l_0\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}$ (з; 43; 17; 2,5); 2) промежуток времени между событиями $\tau = \tau_0\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}$ (з; 43; 16; 2,7); 3) скорость частицы относительно неподвижной системы отсчета $\upsilon = (\upsilon_1 + \upsilon_2)/(1 + \upsilon_1 \upsilon_2 / c^2)$ (з; 85; 30; 2,8); **2. ЧТО: релятивистские энергия и импульс** ($F_{62} = 4$, $CM_{62} \approx 54$): 4) энергия покоя $E = mc^2$ (з; 34; 9; 3,8); 5) релятивистский импульс частицы $\vec{p} = m\vec{\upsilon}/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ (з; 63; 19; 3,3); 6) релятивистская энергия частицы $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ (з; 58; 15; 3,9); 7) релятивистская энергия частицы $E = mc^2/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ (з; 61; 19; 3,2).

* * * * *

Рассмотрена проблема оценки сложности формул и методов, применяемых при решении школьных физических задач. В результате анализа школьных учебников получен список формул по перечисленным разделам. Выделены 32 метода решения задач: 9 по механике, 8 по молекулярной физике и термодинамике, 6 по электродинамике, 3 по оптике, 4 по физике микромира, 2 по частной теории относительности. Каждому методу соответствует своя тема, определенный набор ключевых понятий, физических моделей, идей и принципов. Все формулы заменены словесными описаниями и проанализированы специальной компьютерной программой, обращающейся к словарю, содержащему список терминов с указанием их сложностей. Это позволило: 1) для каждой формулы определить семантическую сложность и коэффициент свернутости информации, характеризующий уровень абстрактности и трудность ее понимания учеником; 2) оценить среднюю сложность методов решения задач по различным темам школьного курса физики. Полученные результаты могут быть использованы для оценки сложности решения различных физических задач, а также классификации формул и методов (тем), исходя из их сложности и степени свернутости информации.

13. СЛОЖНОСТЬ ВЫБОРА ФОРМУЛ ПРИ РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С одной стороны, решение задачи – это дидактический объект, который состоит из текста, формул и рисунков, представленных в учебнике или на экране. Методы оценки его сложности рассматривались выше. С другой стороны, решение задачи – это процесс, в ходе которого ученик действительно впервые решает задачу, анализирует обсуждаемую ситуацию, выбирает соответствующие физическую модель, законы, формулы, создает математическую модель (систему уравнений), осуществляет математические преобразования и вычисления. При этом он не слышит объяснений учителя и не вспоминает известное ему решение. Возникает вопрос: как оценить сложность самостоятельного решения задачи с учетом того, что ученик вынужден сам выбрать «правильные» формулы, составляющие математическую модель анализируемого явления? Следует учесть, что в некоторых случаях (электростатика) неопределенность выбора велика, а в других (влажность воздуха) – мала.

1. Обсуждение проблемы. Решение физической задачи в общем случае имеет три компонента: 1) построение физической модели, запись системы уравнений, выражающих физические законы применительно к обсуждаемой ситуации; 2) осуществление математических преобразований и рассуждений (проецирование векторов, применение теорем и т. д.), в ходе которых ученик абстрагируется от смыслового наполнения физических величин и относится к ним как к переменным; 3) получение числового результата. В связи с этим различают физическую, математическую и вычислительную сложности ФЗ.

Физическая сложность самостоятельного решения задачи складывается из следующих составляющих: 1) семантическая сложность условия задачи, используемых понятий, исходных и конечных формул; 2) структурная сложность текстового кода готового решения, зависящая от средних длин слов и предложений; 3) сложность выбора исходных формул, выражающих связи между известными и искомыми физическими величинами. Решая задачу, ученик из большого количества вариантов (методов, формул) выбирает правильный путь, который приведет его к ответу. При этом ученик может вспомнить соответствующую тему и выписать формулы, содержащие искомую физическую величину. В его сознании должна сложиться головоломка: условие задачи, особенности обсуждаемого явления, признаки объектов, теоретическая модель явления, физические законы, законы логики, математические рассуждения, результат решения задачи, его интерпретация, – все это должно соединиться друг с другом как элементы пазла.

При изучении физики учащиеся знакомятся с различными методами решения ФЗ. **Методом** будем называть совокупность приемов, используемых при решении задач по некоторой теме. Задачи, решаемые одним методом, похожи концептуально, в них используются примерно одни и те же физические модели, понятия, теоретические идеи и формулы. Существующие методы решения задач по темам «Основы МКТ», «Цепи постоянного тока», «Линзы. Оптическая сила» и т. д. принципиально отличаются друг от друга: в каждом методе применяются свои физические идеи, модели, законы и выражающие их формулы.

Изучив тему «Статика», ученик овладевает методом решения задач на равновесие тел. Изучив тему «Постоянный ток», он осваивает метод расчета цепей постоянного тока. Метод – это способ решения задач, в которых анализируются родственные явления. Любой метод включает в себя составляющие (подметоды), заключающиеся в применении конкретной формулы или какой-то последовательности интеллектуальных действий (например, правила Ленца). Так, метод решения задач по геометрической оптике состоит из **подметодов,** предполагающих использование: 1) закона отражения; 2) закона преломления; 3) формулы тонкой линзы; 4) формулы для расчета увеличения $\Gamma = H / h$; 5) способов построения хода лучей в линзах.

Если бы на каждый метод приходилось равное количество физических величин и формул, то сложность выбора пути решения ФЗ была бы одинаковой для каждой темы. Но это не так: метод M_k решения ФЗ по теме «Электростатика» содержит много формул и величин, а метод M_n решения задач по теме «Законы отражения и преломления» – мало. Поэтому при использовании метода M_k неопределенность (энтропия) выбора формулы выше, и решение ФЗ при прочих равных условиях сложнее. Ученик, проанализировав условие физической задачи, выбирает метод ее решения (тему, к которой относится задача), а затем соответствующую формулу (то есть подметод).

2. Распределение формул и методов в пространстве признаков. Как уже было показано, физические формулы могут быть охарактеризованы объемом информации, семантической сложностью и коэффициентом свернутости информации. Рассмотрим распределение формул по механике в пространстве признаков «семантическая сложность SC – объем V», для этого поставим точки на координатной плоскости «$SC - V$» (рис. 13.1.1). Видно, что абсолютное большинство точек (43 из 46) располагаются рядом с возрастающей прямой, проходящей вблизи начала координат. Этот факт и довольно высокий коэффициент корреляции ($\approx 0{,}67$) означают, что между SC и V существует стохастическая связь. Она объясняется тем, что чем больше слов в предложении, тем выше его семантическая сложность. Котангенс угла наклона α примерно равен среднему значению $КСИ$ для этих 43 формул. Три точки, выпадающие из этой закономерности, соответствуют формулам, содержащим понятия с высоким $КСИ$: 1) если в системе действуют консервативные силы, то $E = E_к +$ $+ E_n = const$ ($КСИ = 5{,}3$); 2) для пружинного маятника $x'' = -(k/m)x$ (7,5); 3) интенсивность волны $I = wc$ ($КСИ = 9{,}4$). Большой $КСИ$ означает высокую плотность информации; перечисленные формулы труднее понять и объяснить, так как для этого придется использовать понятия с высокой абстрактностью.

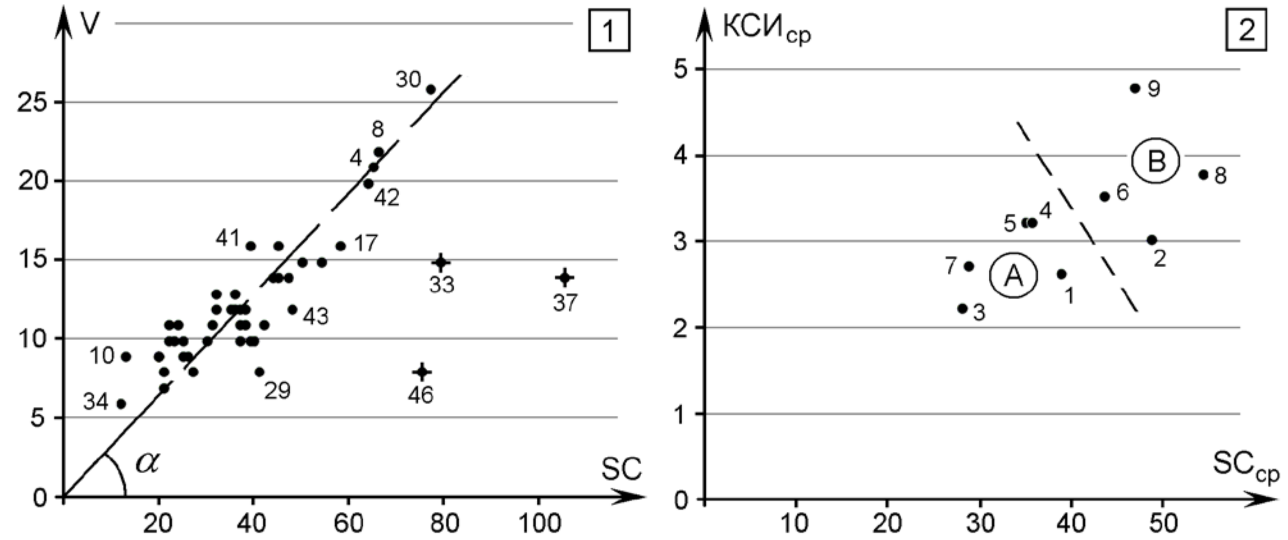


Рис. 13.1. Облака точек, соответствующих формулам (1) и методам (2)

Зная V и SC для формул, можно определить среднюю семантическую сложность $SC_{ср}$ и средний коэффициент свернутости информации $КСИ_{ср}$ для каждого метода (темы). На рис. 13.1.2 показано распределение методов решения задач по механике в пространстве признаков «средняя семантическая сложность – средний $КСИ$». Высокая $SC_{ср}$ означает, что в формулах данного метода заключен значительный объем информации, а высокий $КСИ_{ср}$ свидетельствует о большой трудности понимания формул. Чем дальше точки от начала координат (рис. 13.1.2), тем сложнее соответствующие им методы. Это позволяет разделить методы по сложности на две категории:

А. Простые методы и темы: 1. Равномерное движение. 3. Движение по окружности. 4. Законы Ньютона. Силы в механике. 5. Импульс и его изменение. 7. Равновесие тел.

В. Сложные методы и темы: 2. Равноускоренное движение. 6. Работа, энергия, мощность. 8. Механические колебания. 9. Механические волны.

Теперь сопоставим формулы по механике и электродинамике (это два больших раздела курса физики). Чтобы проанализировать распределение формул в пространстве признаков «объем V – семантическая сложность SC», поставим точки на координатной плоскости «V – SC». На рис. 13.2.1 показаны два облака точек, соответствующих формулам по механике (точки) и электродинамике (квадраты). Видно, что в среднем формулы по электродинамике имеют более высокую семантическую сложность. Средний $КСИ$ для формул по механике равен 3,3, а по электродинамике – 5,2.

Семантическая сложность SC формул электродинамики изменяется от 18 до 140, то есть в 7,8 раза. К самым простым относятся формулы $q_1 + q_2 + q_3 = const$, $I = q/t$, $P = A/t$. Самой сложной является формула $q'' + (1/LC)q = 0$. Между объемом и семантической сложностью формул существует слабая стохастическая связь: коэффициент корреляции между V и SC для формул по электродинамике составляет 0,44. Это объясняется тем, что чем больше слов в предложении, тем выше SC.

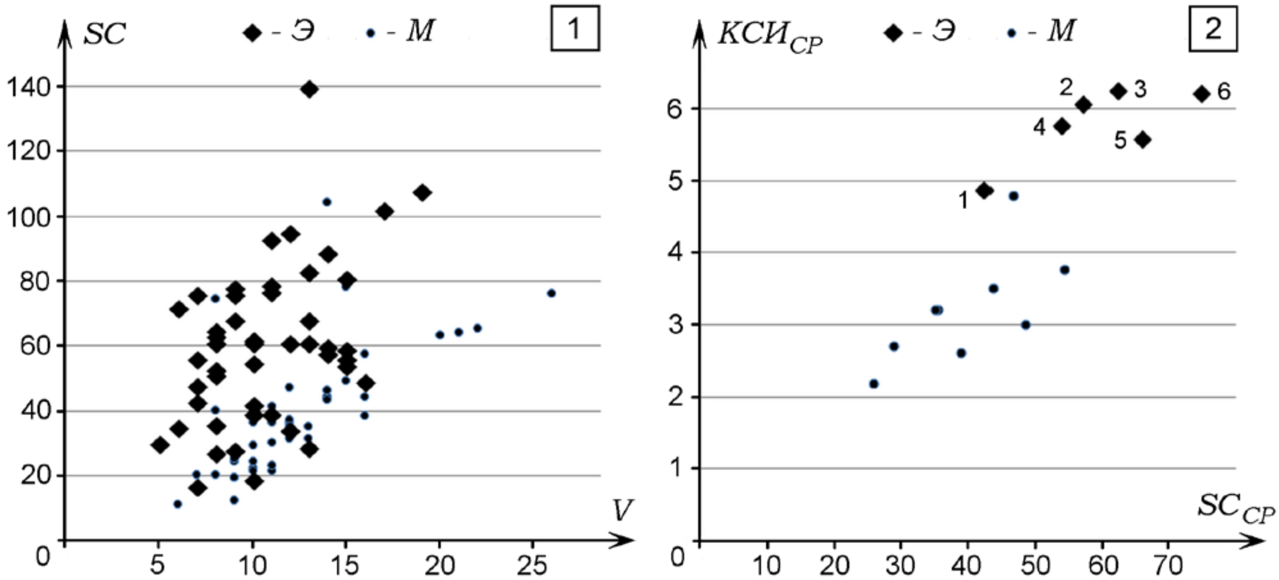


Рис. 13.2. Формулы (1) и методы (2) по механике и электродинамике

На рис. 13.2.2 представлено распределение методов решения задач по механике (точки) и по электродинамике (квадраты) в пространстве признаков «средняя семантическая сложность – средний $КСИ$ формул». Большие значения средней семантической сложности $SC_{ср}$ означают, что формулы рассматриваемых методов несут значительный объем информации. Высокий $КСИ_{ср}$

показывает значительную информационную насыщенность терминов, что затрудняет понимание формул учащимися. Методы решения задач по электродинамике объективно сложнее, о чем свидетельствует бóльшая удаленность соответствующих точек от начала координат (рис. 13.2.2).

На рис. 13.3.1 представлено распределение формул из школьного курса физики по механике (М), молекулярной физике и термодинамике (МФ + Т), электродинамике (Э) на плоскости *V* – *SC*. Видно, что: 1) с ростом объема *V* семантическая сложность *SC* формул, относящихся к одному разделу, в среднем растет; 2) формулы по молекулярной физике и термодинамике (квадратики) в среднем занимают промежуточное положение между формулами по механике (точки) и формулами по электродинамике (кружки).

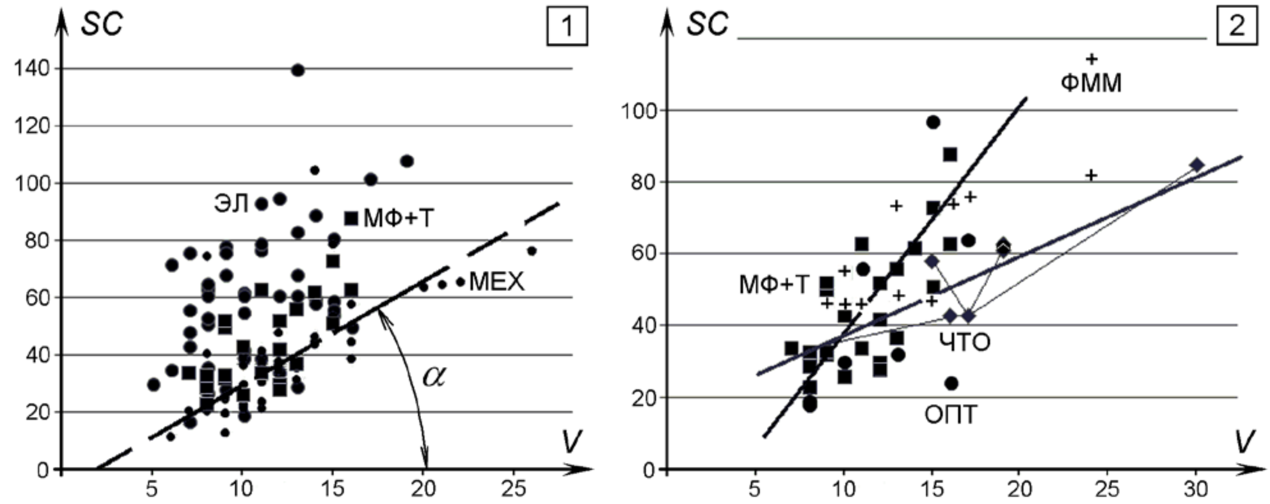


Рис. 13.3. Распределение физических формул в пространстве признаков

На рис. 13.3.2 приведено соответствующее распределение школьных формул по молекулярной физике и термодинамике (квадратики), оптике (кружки), физике микромира (крестики) и ЧТО (ромбы). Если вычислить коэффициенты линейной регрессии для формул из этих разделов, то получается так: механика – 3,17, молекулярная физика и термодинамика – 4,16, ЧТО – 2,45. Эти значения приблизительно равны тангенсу угла наклона α между усредненной прямой, вокруг которой группируются точки, и горизонтальной осью *V*.

Трудность понимания и усвоения формул зависит от средней сложности понятий $SC_{\Pi}^{ср}$ и средней сложности формул $SC_{\Phi}^{ср}$, которые равны: 1) механика: $SC_{\Pi}^{ср} \approx 3{,}28$, $SC_{\Phi}^{ср} \approx 40{,}1$; 2) молекулярная физика и термодинамика: $SC_{\Pi}^{ср} \approx 3{,}97$, $SC_{\Phi}^{ср} \approx 43{,}3$; 3) электродинамика: $SC_{\Pi}^{ср} \approx 5{,}65$, $SC_{\Phi}^{ср} \approx 60{,}4$; 4) оптика: $SC_{\Pi}^{ср} \approx 3{,}44$, $SC_{\Phi}^{ср} \approx 44{,}7$; 5) физика микромира: $SC_{\Pi}^{ср} \approx 4{,}27$, $SC_{\Phi}^{ср} \approx 61{,}9$; 6) ЧТО: $SC_{\Pi}^{ср} \approx 3{,}10$, $SC_{\Phi}^{ср} \approx 55{,}3$. Самыми сложными разделами являются электродинамика и физика микромира; в них используются формулы и понятия с высокими SC.

4. Учет неопределенности выбора формул. Для решения ФЗ ученик создает качественную модель явления, а затем выбирает формулу. Будем исходить из того, что школьник безошибочно определяет раздел физики (механика, молекулярная физика и термодинамика, электродинамика, оптика, физика микромира, частная теория относительности), к которому относится ФЗ. Ему необходимо выбрать метод (тему, к которой относится ФЗ) и формулу (подметод).

В результате анализа учебных пособий [89–91; 79; 80] в курсе физики были выделены 34 метода решения задач, соответствующие 6 разделам. Список методов представлен в табл. 13.1 и 13.2. При этом использовался принцип: каждому методу соответствует своя совокупность явлений, научных понятий, теоретических моделей и закономерностей; большинство формул должно войти либо в тот, либо в другой метод.

Рассмотрим ученика, решающего **одноформульную задачу** (то есть задачу, требующую применения одной физической формулы). На практике реализуются всевозможные варианты, заключенные между двумя крайностями: 1) ученик хорошо знает, как решается ФЗ, поэтому вспоминает решение; 2) ученику эта задача попалась впервые, и он действительно будет ее решать. В первом случае сложность выбора формулы минимальна и равна $CB^{\min} = 1$; во втором – максимальна и зависит от: 1) неопределенности выбора метода или темы, к которой относится ФЗ; 2) неопределенности выбора формулы из всей совокупности формул, относящихся к данному методу (теме). Если рассмотреть промежуточную ситуацию и вычислить среднее арифметическое от $CB^{\max}$ и $CB^{\min}$, то получится $CB^{cp} = (1 + CB^{\max})/2.$ То есть сложность исходной формулы следует увеличить в $CB_{1,j}^{cp}$ раз.

Сложность выбора подходящего метода из 1-го раздела физики (механика) характеризуется величиной $CBM_1 = \ln(M_1)$, где $M_1 =$ 9 – количество методов в первом разделе физики – «Механика». Сложность правильного выбора формулы из *j*-метода равна $CB\Phi_{1,j} = \ln(F_{1,j})$. Получается, что общая сложность выбора формулы для решения одноформульной задачи равна:

$$CB_{1,j}^{\max} = CBM_1 + CB\Phi_{1,j} = \ln(M_1) + \ln(F_{1,j}).$$

В нашем случае 9 методов, поэтому $CBM_1 = \ln(9) \approx 2{,}20$; метод 1 содержит 4 формулы, а метод 6 – 8 формул. Следовательно, $CB\Phi_{1,1} = \ln(4) \approx 1{,}39$ и $CB\Phi_{1,6} = \ln(8) \approx 2{,}08.$ Отсюда: $CB_{1,1}^{cp} \approx (2{,}2 + 1{,}39 + 1)/2 \approx 2{,}3$ и $CB_{1,6}^{cp} \approx (2{,}2 +$ $+ 2{,}08 + 1) / 2 \approx 2{,}6$. Если для решения ФЗ требуется несколько исходных физических формул, то семантическую сложность каждой формулы следует увеличить в $CB_{i,j}^{cp}$ раз, а затем сложить.

Обозначим через i номер раздела курса физики ($i = 1,\ 2\ldots,\ 6$), $j -$ номер метода, тогда $M_i -$ число методов в i-м разделе, $F_{i,j} -$ число формул в j-м методе i-го раздела, то есть в (i, j)-методе. Ученик, определив раздел физики, к которому относится ФЗ, может путаться с выбором используемого метода (темы) и формулы. Допустим, ему необходимо выбрать из M методов, каждый из которых содержит по F формул, в случае, когда методы и формулы используются с равными вероятностями. Энтропия (то есть мера неопределенности) выбора из $N = M \cdot F$ равновероятных вариантов определяется по формуле Хартли:

$H = \ln(M \cdot F)$; она характеризует сложность выбора: $CB = H$. Так как логарифм произведения равен сумме логарифмов, то:

$$CB = \ln(M) + \ln(F) = CBM + CBФ.$$

Иначе говоря, сложность правильного выбора формулы для решения одноформульной задачи складывается из сложности выбора метода (темы) $CBM = \ln(M)$ и сложности выбора формулы $CBФ = \ln(F)$ из этого метода.

В общем случае, сложность выбора подходящего метода из i-го раздела характеризуется величиной $CBM_i = \ln(M_i)$. Сложность правильного выбора формулы из (i, j)-метода равна $CBФ_{i,j} = \ln(F_{i,j})$. Общая сложность выбора исходной формулы для решения одноформульной задачи равна:

$$CB_{i,j} = CBM_i + CBФ_{i,j} = \ln(M_i) + \ln(F_{i,j}) = CB_{i,j}^{\max}, \quad CB_{i,j}^{cp} = (1 + CB_{i,j}^{\max})/2.$$

Таблица 13.1. Сложность выбора формул при решении задач

j	Разделы и методы (темы) курса физики	$F_{i,j}$	$CBФ_{i,j}$	CBM_i	$CB_{i,j}^{\max}$	$CB_{i\,j}^{cp}$
	1. МЕХАНИКА ($i=1$)	40	3,69			
1	Равномерное движение	3	1,10	2,20	3,30	2,15
2	Равноускоренное движение	3	1,10		3,30	2,15
3	Движение по окружности.	5	1,61		3,81	2,40
4	Законы Ньютона. Силы в механике.	8	2,08		4,28	2,64
5	Импульс и его изменение.	3	1,10		3,30	2,15
6	Работа, энергия, мощность.	8	2,08		4,28	2,64
7	Равновесие тел.	3	1,10		3,30	2,15
8	Механические колебания.	5	1,61		3,81	2,40
9	Механические волны.	2	0,69		2,89	1,95
	2. МОЛЕК. ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА ($i=2$)	26	3,26			
1	Количество вещества, число атомов.	3	1,10	2,08	3,18	2,09
2	Основное уравнение МКТ, энергия молекул.	6	1,79		3,87	2,44
3	Уравнение состояния газа. Изопроцессы.	4	1,39		3,47	2,23
4	Влажность воздуха.	2	0,69		2,77	1,89
5	Поверхностное натяжение.	2	0,69		2,77	1,89
6	Работа, внутр. энергия. 1-ое начало термодин...	3	1,10		3,18	2,09
7	Количество теплоты. Теплообмен, плавление ...	4	1,39		3,47	2,23
8	Тепловой двигатель, КПД.	2	0,69		2,77	1,89

Таблица 13.2. Сложность выбора формул (продолжение табл. 13.1)

j	Разделы и методы (темы) курса физики	$F_{i,j}$	$СВФ_{i,j}$	$СВМ_i$	$СВ^{\max}_{i,j}$	$СВ^{ср}_{i\,j}$
	3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА $(i=3)$	47	3,85			
1	Электростатика, напряженность, потенциал.	9	2,20		4,14	2,57
2	Конденсатор, электроемкость.	3	1,10		3,04	2,02
3	Цепи постоянного тока.	10	2,30		4,25	2,62
4	Работа и мощность электр. тока.	4	1,39	1,95	3,33	2,17
5	Магнитное поле. Электромагнитная индукция.	8	2,08		4,03	2,51
6	Электромагнитные колебания, переменный ток.	9	2,20		4,14	2,57
7	Электромагнитные волны.	4	1,39		3,33	2,17
	4. ОПТИКА $(i=4)$	8	2,08			
1	Законы отражения и преломления.	2	0,69		1,79	1,40
2	Линзы. Оптическая сила.	3	1,10	1,10	2,20	1,60
3	Волновая оптика. Интерференция, дифракция.	3	1,10		2,20	1,60
	5. ФИЗИКА МИКРОМИРА $(i=5)$	13	2,56			
1	Фотоэффект, корпускулярная природа света.	3	1,10		2,71	1,85
2	Теория атома водорода.	3	1,10		2,71	1,85
3	Закон радиоактивного распада.	2	0,69	1,61	2,30	1,65
4	Ядерные реакции.	3	1,10		2,71	1,85
5	Доза излучения, эквивалентная доза излучения.	2	0,69		2,30	1,65
	6. ЧАСТНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ $(i=6)$	7	1,95			
1	ЧТО: кинематика, релятивистские эффекты.	3	1,10	0,69	1,79	1,40
2	ЧТО: релятивистские энергия и импульс.	4	1,39		2,08	1,54

В табл. 13.1 и 13.2 перечислены методы решения ФЗ с указанием числа соответствующих подметодов (формул) $F_{i,j}$. Небольшое расхождение с данными из главы 12 объясняется тем, что некоторые формулы объединены в одну (например, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon} t$ и $x = x_0 + \upsilon_{0x} t$). Вычислим сложность выбора метода $СВМ_i$ для каждого раздела физики. Получается так: 1) механика: $M_1 = 9$, $СВМ_1 = \ln(9) \approx 2{,}20$; всего 40 формул, $\ln(40) \approx 3{,}69$; 2) молекулярная физика и термодинамика: $M_2 = 8$, $СВМ_2 \approx 2{,}08$; всего 26 формул, $\ln(26) \approx 3{,}26$; 3) электродинамика $M_3 = 7$, $СВМ_3 \approx 1{,}95$; всего 47 формул, $\ln(47) \approx 3{,}85$; 4) оптика $M_4 = 3$, $СВМ_4 \approx$ 1,10; всего 9 формул, $\ln(9) \approx 2{,}20$; 5) физика микромира

$M_5 = 5$, $CBM_5 \approx 1{,}61$; всего 13 формул, $\ln(13) \approx 2{,}56$; 6) ЧТО: $M_6 = 2$, $CBM_6 \approx 0{,}69$; всего 7 формул, $\ln(7) \approx 1{,}95$.

Средние значения $CB_{i,j}^{cp} = (1 + CB_{i,j}^{\max})/2$, учитываемые при расчете дидактической сложности задач, лежат в интервале 1,40–2,64. При расчете сложности физической составляющей *ДС* задачи необходимо семантическую сложность исходных формул, выбираемых учеником, умножить на соответствующие значения $CB_{i,j}^{cp}$. На первый взгляд кажется, что увеличение сложности самостоятельного решения ФЗ в 1,5–2,6 раза за счет учета неопределенности выбора исходных формул является слишком большим, но это не так. Самостоятельно решить задачу гораздо сложнее, чем понять готовое решение, представленное в учебнике или проанализированное учителем на уроке.

Пример 1. Во втором разделе курса физики (молекулярная физика и термодинамика) применяется 8 методов ($M_2 = 8$); сложность выбора подходящего метода равна $CBM_2 = \ln(M_2) = \ln(8) \approx 2{,}08$. Сложность правильного выбора формулы из *j*-го метода составляет $CB\Phi_{2j} = \ln(F_{2j})$. Суммируя эти величины, получаем максимальную сложность выбора формулы для решения одноформульной ФЗ по этой теме:

$$CB_{2j}^{\max} = CBM_2 + CB\Phi_{2j} = \ln(M_2) + \ln(F_{2j}).$$

При расчете физической сложности задачи сложность используемой формулы SC_f следует увеличить в $CB^{cp} = (1 + CB_{ij}^{\max})/2$ раз. Например, во втором методе 6 формул, поэтому $CB\Phi_{22} = \ln(6) \approx 1{,}79$. Поэтому $CB_{22}^{\max} \approx$ 2,08 + + 1,79 = 3,87, $CB_{22}^{cp} \approx 2{,}4$. При оценке физической сложности двух- или трехформульной ФЗ необходимо семантическую сложность SC_f каждой формулы увеличить в CB_{ij}^{cp} раз, а затем все сложить. Вычисленные значения CB_{ij}^{cp} и CM_{ij} приведены в табл. 13.1.

Пример 2. Рассмотрим пример оценки физической сложности следующей задачи из ЕГЭ [26]: *К источнику ЭДС подключен реостат. Какова ЭДС, если при силе тока в цепи* $I_1 = 1$ *А выделяемая на реостате мощность* $N_1 = 4$ *Вт, а при силе тока* $I_2 = 5$ *А выделяемая на реостате мощность* $N_2 = 10$ *Вт?* Ключевые понятия: ЭДС, мощность, сила тока, сопротивление, реостат. Применяются формулы: $I = ЭДС/(R + r)$, $N = I^2 R$. После преобразований получается окончательная формула:

$$ЭДС = \frac{N_1}{I_1} + I_1 \frac{N_1/I_1 - N_2/I_2}{I_2 - I_1}.$$

Семантическая сложность условия задачи, ключевых слов, исходных и конечных формул (то есть физическая сложность) составляет S_{sem} = 272. Сложность выбора $CB^{ср}$ для первой формулы (тема «Цепи постоянного тока») 2,62, а для второй (тема «Работа и мощность электрического тока») 2,17 (см. табл. 13.1 и 13.2). Их семантические сложности 64 и 52, входящие в S_{sem}, нужно увеличить в 2,62 и 2,17 раза, то есть к 272 прибавить $64 \cdot 1{,}62$ и $52 \cdot 1{,}17$. С учетом этого физическая сложность решения задачи увеличивается на 104 + 61 и составляет 437. Средние длина слова $D_{СЛ} = 6{,}33$ и длина предложения $D_{ПР} = 11{,}17$, поэтому структурная сложность $S_{str} = 1{,}66$. Физическая составляющая дидактической сложности самостоятельного решения задачи равна $ФС = 1{,}66 \cdot 437 = 725$. Для оценки математической сложности ФЗ следует создать файл, в котором математические рассуждения закодированы в виде отдельных предложений, и с помощью компьютерной программы определить количество семантической информации в нем [72].

* * * * *

Итак, сложность формул и методов, применяемых при решении школьных задач по физике, зависит от семантической сложности используемых понятий и сложности правильного выбора формул. Сложность выбора формулы зависит от сложности выбора метода (темы) и количества формул в данном методе. Для каждого раздела физики вычислена неопределенность (энтропия) выбора метода решения, равная логарифму от количества методов. Для каждого метода найдена неопределенность выбора формулы, равная логарифму от числа формул в методе. Если сложить эти неопределенности, то получим энтропию выбора формулы при самостоятельном решении задачи учеником. Кроме того, изучено распределение формул из различных разделов физики в пространстве их признаков «объем – семантическая сложность». Учитывая количество формул в каждом методе, удалось оценить неопределенность их выбора при самостоятельном решении одноформульной задачи. Обсужден вопрос об учете неопределенности выбора формул при решении двух- и трехформульных задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Монография посвящена проблеме оценивания сложности выполнения теоретических заданий по физике и математике. Предлагаемый в ней подход предусматривает применение формально-лингвистических и информационных методов анализа условия и решения задачи. В результате исследования:

1. Определены понятия: дидактическая сложность задачи, семантическая и структурная сложности, физическая, математическая и вычислительная сложности задачи. Показано, что сложность задачи зависит от: 1) числа элементарных операций; 2) средней сложности операций; 3) сложности наиболее сложной операции. Рассмотрен метод оценки сложности задачи путем автоматического подсчета терминов в ее решении и учета их семантической сложности. Проанализирована связь сложности понятия с его трудностью.

2. Создана компьютерная модель решения задачи одним или несколькими учениками. Проанализированы результаты моделирования следующих ситуаций: 1) ученик совершает ограниченное число попыток; 2) ограничено время решения; 3) решение задачи группой неодинаковых учеников, работающих независимо; 4) решение задачи группой учеников при условии, что первый решивший ученик через небольшое время демонстрирует свое решение на доске и тем самым помогает остальным обучаемым.

3. Анализ формул из школьного учебника физики позволил подсчитать число типов физических задач, которые в принципе могут быть решены или поняты учеником. Были выделены одноформульные, двухформульные и трехформульные физические задачи, а также комплексные задачи, предусматривающие использование как минимум двух физических формул, относящихся к разным методам (разделам физики). Установлено, что к концу 11 класса ученик

способен решить или понять решение около 200 одноформульных задач, 275 двухформульных задач и 145 трехформульных и комплексных задач.

4. Рассмотрено применение сложностно-синергетического подхода к учебному процессу. Введено понятие «частотная сложность термина», изучена зависимость числа усвоенных понятий от их сложности. При этом используется метафора «мозг – канал связи» и учитывается зависимость пропускной способности «мозгового декодера» от сложности понятия. Получена зависимость количества n усвоенных учеником понятий от сложности S; ее график сначала возрастает, достигает максимума, а затем убывает. Площадь под этим графиком равна общему числу слов, используемых учеником. По мере обучения максимум зависимости $n(S)$ сдвигается в сторону увеличения сложности.

5. Разработан метод оценки сложности логических рассуждений, зависящей от количества и сложности логических связей. Для этого определяют количество математических высказываний (или других элементарных суждений) в проводимых умозаключениях и учитывают суммарную семантическую сложность терминов, обозначающих входящие в формулы величины. Выявляют все явно используемые элементарные факты и логические правила, дописывают все неявно используемые утверждения, создают текстовый файл *Text.txt*, включающий в себя словесную составляющую решения задачи, а также файл *Slovar.txt*, содержащий все научные термины с указанием их сложностей. С помощью компьютерной программы анализируют файл *Text.txt*, определяют общую семантическую сложность решения и вычисляют долю логических рассуждений и эвристическую сложность текста.

6. Предложен метод оценки дидактической сложности математических задач, выявлены основные методы их решения. Среди них: методы арифметических вычислений, алгебраических преобразований, геометрических рассуждений и операций с векторами, применения формул комбинаторики, использования тригонометрических формул, использования логарифмов и экспоненциальных функций, дифференцирования и интегрирования, операторный метод.

Показано, что: 1) каждая математическая задача может быть охарактеризована одномерной матрицей, компоненты S_k которой пропорциональны сложности применения k-го метода для ее решения; 2) сложность применения метода M_k при решении данной задачи может быть определена путем подсчета количества терминов-маркеров и учета их сложностей с помощью специальной компьютерной программы. Полученные результаты оценки сложности решений математических задач доказывают эффективность применяемого подхода.

7. Предложен метод оценки сложности доказательства теоремы, заключающийся в «измерении» количества семантической информации в ее формулировке, рисунке, проводимых рассуждениях и умножении полученной величины на показатель разнообразия используемых терминов. Для этого формулировку теоремы, рисунок и собственно доказательство анализируют с помощью специальной компьютерной программы. Проведена оценка 12 часто используемых теорем, это позволило их упорядочить по сложности. Для каждой теоремы были определены объем доказательства, общее количество семантической информации в нем, показатель разнообразия терминов, число логических рассуждений, коэффициент свернутости информации, дидактическая сложность.

8. Разработан метод оценки физической, математической и вычислительной сложностей задач по физике. Для определения физической сложности создают файл, содержащий условие задачи, пять ключевых терминов, применяемые формулы (в словесном коде), конечную формулу, и анализируют его с помощью специальной программы, определяя общую семантическую сложность и коэффициент свернутости информации. Математическая сложность оценивается путем суммирования сложностей математических понятий и операций. Для определения вычислительной сложности учитывают число нажатий на кнопки калькулятора и сложность понятий, обозначающих математические функции.

9. Рассмотрены различные подходы к изучению системы формульных знаний школьного курса физики, заключающиеся в выявлении семантических связей между ключевыми понятиями, входящими в школьные формулы, осу-

ществлении их кластеризации, получении графов, визуализирующих ментальное пространство «идеального ученика». В результате контент-анализа учебников физики выписаны все основные формулы. С помощью онлайн-ресурсов Интернета и специально созданных компьютерных программ выявлены ключевые понятия и величины, определены косинусные меры близости, характеризующие их степень смысловой связанности, рассчитана матрица семантических расстояний, осуществлена кластеризация и построена семантическая сеть понятий, визуализирующая связи между ними.

10. Произведена оценка сложности основных формул школьного курса физики. В результате контент-анализа стандартных школьных учебников выписаны все 147 формул, выделены 33 метода решения задач. С целью определения семантической сложности, формулы представлены в виде предложений, которые сохранены в текстовом файле и были проанализированы с помощью компьютерной программы. Это позволило определить сложность формул (или соответствующих им теоретических утверждений), их объем и коэффициент свернутости информации, а также сложности методов. Изучено распределение формул в пространстве признаков «семантическая сложность – коэффициент свернутости информации».

11. Показано, что физическая сложность самостоятельного решения задачи учащимся зависит: 1) от сложности формул; 2) степени неопределенности их выбора. Последнее складывается из неопределенностей выбора метода (темы) и подходящей формулы в данном методе. Для каждого раздела физики вычислена неопределенность выбора метода решения, а для каждого метода найдена неопределенность выбора формулы; их сумма дает энтропию выбора формулы. Определена средняя сложность каждого метода решения физических задач. Показано, как учесть неопределенность выбора формул при самостоятельном решении одно-, двух- и трехформульных задач.

Говоря о сложности задачи, необходимо учитывать, что нас в первую очередь интересует возможность ее решения конкретным учащимся. Трудность задачи (то есть ее субъективная сложность) зависит не только от перечисленных выше характеристик, но и от уровня подготовки ученика. Задача, кажущаяся сложной для одного ученика, может быть относительно простой для другого.

Разработка эффективных методов оценки сложности теоретических задач является крайне важной проблемой дидактики. Комплексный подход, учитывающий объективные характеристики задачи, а также интеллектуальные особенности обучающихся и различные психологические факторы, позволит создать адаптивные системы обучения, максимально способствующие усвоению материала и развитию когнитивных навыков. Они смогут автоматически подстраивать сложность задач под индивидуальные потребности и возможности конкретных школьников. Это, в свою очередь, приведет к росту мотивации, интереса к предмету и повышению результативности обучения.

Другое перспективное направление заключается в создании автоматизированной системы оценки сложности учебных задач, использовании методов машинного обучения. Для этого могут быть использованы различные нейросети, которые уже сейчас могут легко решить любую школьную задачу по физике и математике. «Обучив» их на большом объеме данных, содержащих информацию о задачах, их характеристиках и результатах решения, мы получим систему, правильно оценивающую различные виды сложности физических и математических задач.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение к главе 2

Программа ПР-1. Моделирование решения задачи учеником.

```
uses crt, graphABC; const M=10000;
Var x,D,t,pr,tsr,p_op:single; t0,S,isp,N_popytok,uspeh,
popytka,i,j,n:integer; Label m1, m2;
BEGIN MaximizeWindow;
For j:=0 to 25 do begin t0:=100; {t0:=100-20*j;}
N_popytok:=1+3*j; MoveTo(50,600);
For i:=1 to 100 do begin p_op:=0.01*i; S:=0;
isp:=0; Repeat inc(isp); t:=0; popytka:=0;
Repeat n:=0; inc(popytka);
Repeat t:=t+1; x:=random(100)/100;
If x<p_op then inc(n) else goto m1; until (n=10);
inc(uspeh); If t<t0 then inc(S); goto m2; m1:
until (popytka>=N_popytok){(t>=t0)}; m2: until isp>=20000;
Lineto(50+round(600*p_op),600-round(S/isp*500));
end; end; end.
```

Программа ПР-2. Моделирование решения задачи группой учеников без подсказки.

```
uses crt, graphabc;
const m=20; sigma=0.3; Zsr=5; Nu=50; St=8; b=1;
var i,j,jj,d,r,S,t,tt,u,flag,fl0,SumT :integer;
k,fl : array[0..50] of integer; x,f,p: single;
z: array[0..99] of single; Slogn: array[0..20] of single;
BEGIN MaximizeWindow; Randomize;
line(0,550,1400,550); line(10,0,10,550);
Repeat inc(u); i:=1; r:=1;  MoveTo(0,550);
For j:=1 to Nu do fl[j]:=0; j:=0; tt:=0;  t:=0; d:=0;
Repeat  x:=Zsr-3*sigma+random(round7(6*sigma*100))/100;
f:=exp(-(x-Zsr)*(x-Zsr)/2/sigma)/sigma/sqrt(6.28);
If random(100)/100<f then begin z[d]:=x; inc(d); end;
until d>Nu; For i:=1 to Nu do k[i]:=1;
For j:=1 to m do Slogn[j]:=St*exp(-0.2*(j-1)); flag:=0;
Repeat inc(t); if t mod 5=0 then line(10+10*t,550,10+10*t,0);
If (flag=1)and(t>=tt+5) then r:=2;
For i:=1 to Nu do begin
```

```
If fl[i]=0 then begin p:=1/(1+exp(-b*(z[i]-Slogn[k[i]])));
If random(100)/100<p then inc(k[i]);
If k[i]=m+1 then begin flag:=1; fl[i]:=1; end; end; end;
If (fl0=0)and(flag=1) then tt:=t; fl0:=flag;
S:=0; For jj:=1 to Nu do S:=S+fl[jj];
circle(10+10*t,550-7*S,r); Lineto(10+10*t,550-7*S);
until {t>200} S>=0.9*Nu; SumT:=SumT+t;
until u>50; writeln(SumT/50); Readkey;
END.
```

Программа ПР-3. Моделирование решения задачи группой учеников с подсказкой.

```
uses crt, graphabc;
const m=20; sigma=0.3; Zsr=5; Nu=50; c=0.2; St=8; b=1;
var i,j,jj,d,r,S,t,tt,u,flag,fl0,SumT :integer;
k,fl : array[0..50] of integer; x,f,p,podsk: single;
z: array[0..99] of single; Slogn: array[0..20] of single;
BEGIN MaximizeWindow; Randomize;
line(0,550,1400,550); line(10,0,10,550);
Repeat inc(u); i:=1; r:=1; MoveTo(0,550);
For j:=1 to Nu do fl[j]:=0; j:=0; tt:=0;  t:=0; d:=0;
Repeat  x:=Zsr-3*sigma+random(round(6*sigma*100))/100;
f:=exp(-(x-Zsr)*(x-Zsr)/2/sigma)/sigma/sqrt(6.28);
if random(100)/100<f then begin z[d]:=x; inc(d); end;
until d>Nu;
For i:=1 to Nu do k[i]:=1;
For j:=1 to m do Slogn[j]:=St*exp(-c*(j-1)); podsk:=0;flag:=0;
Repeat inc(t); if t mod 5=0 then line(10+10*t,550,10+10*t,0);
If (flag=1)and(t>=tt+5) then begin podsk:=10; r:=2; end;
For i:=1 to Nu do begin
If fl[i]=0 then begin p:=1/(1+exp(-b*(z[i]-Slogn[k[i]]+podsk)));
if random(100)/100<p then inc(k[i]);
if k[i]=m+1 then begin flag:=1; fl[i]:=1; end; end; end;
If (fl0=0)and(flag=1) then tt:=t; fl0:=flag;
S:=0; For jj:=1 to Nu do S:=S+fl[jj];
circle(10+10*t,550-7*S,r); Lineto(10+10*t,550-7*S);
until t>100{S>=0.98*Nu}; SumT:=SumT+t;
until u>20; writeln(SumT/20); Readkey;
END.
```

Приложение к главе 8

Программа ПР-4. Определение арифметической компоненты сложности математической задачи.

```
uses crt; const chislo_strok=15; z=0.7;
var aa: string; Vh,F,Sl: text; x,i,j,k: integer;
dd,dlina,flag,N: integer; a,s: array[0..5000]of string;
SUM,SSl: single; chislo,Slogn: array[0..5000]of integer;
Procedure Podschet; var i:integer;
begin For i:=1 to N do if (chislo[i]>0) then begin
SSl:=SSl+chislo[i]*Slogn[i]; end; delay(20);
write('SLOGNOST ', SSl);  writeln(' '); end;
Procedure Volume;
var ii,i,j,k:integer;
begin For i:=1 to chislo_strok do SUM:=SUM+length(a[i]); end;
Procedure Slov; var ii,i,j,k:integer;
begin
Assign(Sl,'c:\arifm.txt'); Reset(Sl);
x:=0; Repeat inc(x); Readln(Sl,s[x]);
writeln(s[x]); until s[x]='xxxx'; n:=x-1;
For ii:=1 to N do Val(copy(s[ii],length(s[ii])-1,3),Slogn[ii],dd);
For ii:=1 to N do begin j:=0; Repeat inc(j); until
copy(s[ii],j,1)=' '; s[ii]:=copy(s[ii],1,j-1);
If copy(s[ii],1,1)='_' then s[ii]:=' '+copy(s[ii],2,j-2);
end; end;
BEGIN Assign(Vh,'c:\Vhod.txt'); Reset(Vh);
 Assign(F,'c:\Vyhod.txt'); Rewrite(F); Slov;
For k:=1 to chislo_strok do begin Readln(Vh,a[k]); end; Volume;
For k:=1 to chislo_strok do begin  writeln(a[k],' ',k);  end;
For k:=1 to chislo_strok do begin
For i:=1 to N do begin dlina:=length(s[i]);
Repeat flag:=0;
For j:=1 to length(a[k]) do If s[i]=copy(a[k],j,dlina)then
begin flag:=1; inc(chislo[i]);
aa:=copy(a[k],1,j-1)+' ## '+copy(a[k],j+dlina,length(a[k])-j-
dlina+1); a[k]:=aa; end;
until flag=0; end; end;
For i:=1 to N do if chislo[i]>0 then begin
write(s[i],'=',chislo[i],' ',Slogn[i]); writeln; delay(20); end;
For i:=1 to N do if chislo[i]>0 then writeln(F,s[i],'
',chislo[i],' ',Slogn[i]);
For k:=1 to chislo_strok do begin write(F,' '+a[k]{,' ',k});
writeln(F,' '); delay(20);end; writeln('00000'); Podschet;
Repeat until KeyPressed; Close(Vh); Close(F); Close(Sl);
END.
```

Пример файла Vhod.txt:

Задача 9. Найти дивергенцию и ротор векторного поля в точке (число,число,число):
вектор=скобка число*перемен^2 - перемен ^3 *орт сумма число*орт +
скобка число * перемен +число*перемен^2 *орт.

проекция=число*перемен^2 - перемен ^3 , проекция=число, проекция=число*перемен+число*перемен^2 . по определению:
дивергенция вектор=производная проекция+производная проекция+производная проекция, ротор вектор=скобка производная проекция-производная проекция*орт+скобка производная проекция-производная проекция*орт+ скобка производная проекция-производная проекция*орт.
получаем: дивергенция вектор=число*перемен+число*перемен,
ротор вектор=число*орт+число*перемен^2 *орт.
в точке (число,число,число): дивергенция вектор=число*число+число*число=число,
ротор вектор=число*орт+число*орт.

Ниже – содержание файла arifm.txt. Он включает в себя слова-маркеры (без окончаний), относящиеся к арифметическим операциям, с указанием их сложностей. Слова в файле должны быть расположены в одном столбце.

^2 3	делить 2	разность 2	скобк 2
^3 3	меньш 2	минус 2	равенств 2
квадрат 3	равн 2	сумма_сигма 3	индекс 3
в_куб 3	корен 4	ось_координат 3	/ 3
число 2	корн 4	сумма 2	* 3
формул 3	возрастающ 3	делить 3	- 2
один 2	единиц 2	умножить 3	+ 2
минус 2	_пи 3	вычесть 2	= 2
плюс 2	расстояни 2	квадрат 3	хххх
перемен 2	радиус 2	объем 2	
интервал 5	десять_степень 4	угол 2	

Приложение к главе 9

Примеры теорем и их доказательств, закодированных вербальным кодом:

Теорема о площади треугольника:
площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту рассмотрим треугольник abc проведем высоту ch достроим треугольник до параллелограмма треугольники abc dcb равны по трем сторонам bc общая сторона сторона ab равна cd сторона ac равна bd потому противоположные стороны параллелограмма поэтому площади треугольников равны площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту теорема доказана.

Теорема о двух хордах:
если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды рисунок окружность две хорды ab и cd пересекаются в точке e проведем отрезки ab и cd треугольники ade cbe подобны по двум углам потому что углы 1 и 2 равны потому что они вписанные опираются на одну дугу bd углы 3 и 4 равны потому что вертикальные поэтому ae делить ce равно de делить be ae умножить be равно ce умножить de теорема доказана.

Теорема синусов:
стороны треугольников пропорциональны синусам противолежащих углов рассмотрим треугольник abc со сторонами a b c площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними поэтому площадь треугольника равна половина произведения a b на синус угла c равна половина произведения b c на синус угла a равна половина произведения c a на синус угла b умножим полученной равенство на 2 разделим равенство на произведение a b и c синус c делить c равно синус b делить b равно синус a делить a перевернем дроби возведем в степень минус 1 a делить синус a равно b делить синус b равно c делить синус c равно теорема доказана.

Теорема Пифагора:
квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов ac в квадрате плюс cb в квадрате равно ab в квадрате рисунок треугольник abc высота cd если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника то треугольники подобны угол d равен углу c угол a общий значит треугольник abc подобен треугольник adc угол d равен угол d равен углу c угол b общий значит треугольник abc подобен треугольник bcd у подобных треугольников отношения соответствующих сторон равны значит ac делить ab равно ad делить ac если левую и правую части равенства умножить на одно и то же число то равенство останется истинным значит ac в квадрате равно ab умножить на ad у подобных треугольников отношения соответствующих сторон равны cb делить ab равно db делить cb значит cb квадрат равно ab умножить на db значит ac квадрат плюс cb квадрат равно ab умножить скобки ad сумма db равно ab в квадрате

Результат работы нейросети:

GeekBot Выбрать режим Вход

докажи, что сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы, используя подобие треугольников

Нейросеть

Да, доказать теорему Пифагора можно и через подобие треугольников. Это, пожалуй, даже более элегантный способ. Вот доказательство:

1. Построение:

- Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, где угол C - прямой.
- Обозначим катеты: AC = b, BC = a, гипотенузу AB = c.
- Проведем высоту CH из вершины прямого угла C на гипотенузу AB. Обозначим AH = x, BH = y.

2. Подобие треугольников:

- Треугольник ABC подобен треугольнику ACH (по двум углам: угол A - общий, угол C = угол AHC = 90°). Следовательно, ΔABC ~ ΔACH.
- Треугольник ABC подобен треугольнику CBH (по двум углам: угол B - общий, угол C = угол CHB = 90°). Следовательно, ΔABC ~ ΔCBH.
- Отсюда также следует, что ΔACH ~ ΔCBH (так как они оба подобны ΔABC).

3. Соотношения из подобия:

Из подобия треугольников ABC и ACH следует:
AB / AC = AC / AH => c / b = b / x => $b^2 = cx$
Из подобия треугольников ABC и CBH следует:
AB / BC = BC / BH => c / a = a / y => $a^2 = cy$

4. Сумма квадратов катетов:

Сложим полученные уравнения:
$a^2 + b^2 = cy + cx = c(x + y)$

5. Заключение:

Но x + y = AH + BH = AB = c. Поэтому:
$a^2 + b^2 = c * c = c^2$

Вывод:

Мы доказали, что сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника ($a^2 + b^2$) равна квадрату гипотенузы (c^2), используя подобие треугольников ABC, ACH и CBH.

Приложение к главе 11

Фрагмент входного файла Formula.txt (остались только понятия, соответствующие физическим объектам и величинам):

ускорение частица проекция ускорение проекция ускорение.
вектор скорость частица вектор перемещение интервал время.
радиус-вектор частица радиус-вектор перемещение скорость время.
координата начальная координата проекция скорость время.
путь модуль проекция скорость время скорость время.
вектор скорость частица вектор скорость вектор скорость.
вектор ускорение частица изменение вектор скорость интервал время.
. . . .
излучение частота свет энергия состояния атом энергия.
радиоактивный распад атом атом степень время периодполурасп.
дефект масса ядро протон масса протон нейтрон масса нейтрон масса ядро.
поглощенная доза излучение поглощенная энергия ионизирующее излучение масса тело.

В результате его анализа: 1) получена матрица расстояний между понятиями и осуществлена их кластеризация; 2) построена семантическая сеть между терминами, обозначающими физические объекты и величины.

Программа ПР-5. Определение семантической близости между понятиями, входящими в формулы. Чтобы не путать понятия «сила» и «сила тока», второе понятие во входном файле Formuly.txt заменено на «сллаток».

```
uses crt; const chislo_strok=166;
alf='абвгдеёжзийклмнопрстуфхцчшщъыьэюя'; NN=37;
w: array[1..NN]of string=('частиц','тело',' газ','молекул','атом',
'колебан','волн',' поле','свет','расстояни','угол','координат',
'скорост','ускорен','масс','сила','вектор','модул','проекци',
'изменен','постоянн','заряд','энерги','сллаток','напряжени',
'напряженност','циклчастот', 'температ','электрическ','амплитуд',
'синус','сопротивлени','частот','давлени','индукци','работ', 'кол-
тепл');
var i,k,r,t: integer; chisl,S,S1,S2:single;
kos: array[0..NN,0..NN]of single; a: array[0..300]of string;
ff: array[0..170,0..170]of integer; Vh,F: text;
BEGIN Assign(Vh,'c:\Formula.txt'); Reset(Vh);
Assign(F,'c:\vihod.txt'); Rewrite(F);
For k:=1 to chislo_strok do begin Readln(Vh,a[k]); end;
For k:=1 to chislo_strok do begin writeln(k); a[k]:=' '+a[k]+' ';
writeln(F, a[k]); end;
For t:=1 to NN do For k:=1 to chislo_strok do For i:=1 to
length(a[k]) do begin
If w[t]=copy(a[k],i,length(w[t])) then inc(ff[t,k]); end;
For k:=1 to chislo_strok do begin For t:=1 to NN do
write(ff[t,k],' '); writeln(); end;
For t:=1 to NN do For r:=1 to NN do begin S1:=0; S2:=0; chisl:=0;
```

```
For k:=1 to chislo_strok do begin chisl:=chisl+ff[t,k]*ff[r,k];
S1:=S1+ff[t,k]*ff[t,k]; S2:=S2+ff[r,k]*ff[r,k]; end;
kos[t,r]:=(chisl)/sqrt(S1+0.0000001)/sqrt(S2+0.0000001); end;
For t:=1 to NN do begin writeln(F,t); {t:=30;}
 For r:=1 to NN do writeln(F,kos[t,r]:3:3); end;
Close(Vh); Close(F); END.
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аванесов, В. С. Методологические и теоретические основы тестового педагогического контроля : дис. ... д-ра пед. наук. – Санкт-Петербург, 1994. – 339 с.

2. Алябышева, Ю. А., Антонов, А. Ю., Веряев, А. А. Цифровизация тезаурусного подхода в образовании // Информатика и образование. – 2020. – № 1. – С. 51–58.

3. Аммосова, Н. В. Синергетические подходы в обучении математике. – Астрахань : ИП Н. В. Забродина, 2022. – 172 с.

4. Андриевская, Н. К. Гибридная интеллектуальная мера оценки семантической близости // Проблемы искусственного интеллекта. – 2021. – № 1 (20). – С. 4–17.

5. Антонов, А. В. Системный анализ. – Москва : ИНФРА-М, 2017. – 366 с.

6. Аршинов, В. И., Свирский, Я. И. Сложностный мир и его наблюдатель // Человек. – 2019. – № 2 (30). – С. 130–153.

7. Бабаев, В. С., Кулагина, М. В., Шкитина, Ю. Ю. Определение трудности и сложности физических задач // Физическое образование в вузах. – 2005. – Т. 11, № 4. – С. 93–101.

8. Балл, Г. А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект. – Москва : Педагогика, 1990. – 184 с.

9. Берков, В. Ф., Терлюкевич, И. И. Логика : Практикум : учебное пособие. – Минск : УП «Технопринт», 2003. – 167 с.

10. Бермудес, С. Х. Метод измерения семантического сходства текстовых документов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2017. – № 3 (188). – С. 17–29.

11. Синергетическая парадигма: синергетика образования / отв. ред. В. Г. Буданов. – Москва : Прогресс-Традиция, 2007. – 592 с.

12. Бухарова, Г. Д. Основные понятия теории решения задач и теории обучения решению задач // Образование и наука. – 2011. – № 3 (82). – С. 44–58.

13. Ванюшкин, А. С., Гращенко, Л. А. Методы и алгоритмы извлечения ключевых слов // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2016. – № 19. – С. 85–93.

14. Вараксина, Е. И. Ресурсы экспериментальной деятельности субъектов физического образования: дис. … д-ра пед. наук. – Челябинск, 2024. – 496 с.

15. Вахрушева, А. Я. и др. Лингвистическая сложность учебных текстов / А. Я. Вахрушева, М. И. Солнышкина, Р. В. Куприянов, Э. В. Гафиятова, И. О. Климагина // Вопросы журналистики, педагогики, языкознания. – 2021. – Т. 40, № 1. – С. 89–99.

16. Гельфман, Э. Г., Холодная, М. А. Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся. – Санкт-Петербург : Питер, 2006. – 384 с.

17. Гетманова, А. Д. Учебник логики со сборником задач : учебник. – Москва : КноРус, 2011. – 368 с.

18. Гвоздева, А. В., Хтун, Х. Н. Синергетический подход к методам обучения // Ученые записки : электронный научный журнал Курского государственного университета. – 2015. – № 1 (33). – С. 133–136.

19. Гидлевский, А. В. Исчисление трудности дидактической задачи // Вестник Омского университета. – 2010. – № 4. – С. 241–246.

20. Гунасекера, А. С. Физические задачи как средство развития интуитивного мышления учащихся // Известия РГПУ им. А. И. Герцена : Аспирантские тетради. Ч. II. Педагогика и психология, теория и методика обучения. – 2008. – № 33 (73). – С. 46–49.

21. Гусев, В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике. – Москва : Вербум-М : Академия, 2003. – 432 с.

22. Давыдов, В. В. Теория развивающего обучения. – Москва : ИНТОР, 1996. – 544 с.

23. Добрынина, Н. Ф. Математические модели распространения знаний и управления процессом обучения студентов // Фундаментальные исследования. – 2009. – № 7. – С. 7–9.

24. Дэвид, Г. Метод парных сравнений. – Москва : Статистика, 1978. – 144 с.

25. Дюк, В. А. Компьютерная психодиагностика. – Санкт-Петербург : Братство, 1994. – 364 с.

26. ЕГЭ. Физика типовые экзаменационные варианты 30 вариантов / под ред. М. Ю. Демидовой. – Москва : Национальное образование, 2022. – 400 с.

27. Епишева, О. Б., Крупич, В. И. Учить школьников учиться математике : Формирование приемов учебной деятельности : Кн. для учителя. – Москва : Просвещение, 1990. – 128 с.

28. Жук, Л. В. Особенности мыслительного процесса в области геометрии // Альманах современной науки и образования. – 2011. – № 3 (46). – С. 135–137.

29. Журавлева, Н. С. Учебно-познавательное умение – решать физические задачи // Инновационное развитие науки и образования. – Пенза, 2017. – С. 65–79.

30. Захарищева, М. А., Камалов, Р. Р., Гареева, Г. А. Формирование информационной компетентности в контексте дистанционного образования // Информатика и образование. – 2008. – № 10. – С. 124–125.

31. Зеркаль, О. В. Семантическая информация и подходы к ее оценке. Часть 1. Семантико-прагматическая информация и логико-семантическая концепция // Философия науки. – 2014. – № 1. – С. 53–69.

32. Зиганшина, Ч. Р. и др. Сложность учебного текста (на материалах русскоязычных и англоязычных учебных текстов по физике) / Ч. Р. Зиганшина, Э. М. Вильданов, Т. В. Мазаев, А. М. Айдарова // Глобальный научный потенциал. – 2020. – № 12 (117). – С. 235–241.

33. Зильберглейт, М. А., Невдах, М. М., Шпаковский, Ю. Ф. Оценивание трудности понимания учебных текстов для высшей школы // Информатика. – 2011. – № 2. – С. 111–123.

34. Ивашкин, Ю. А., Назойкин, Е. А. Мультиагентное имитационное моделирование процесса накопления знаний // Программные продукты и системы. – 2011. – № 1. – С. 47–52.

35. Кабанова, В. С. О синергетическом подходе к воспитанию и обучению // Образование и саморазвитие. – 2014. – № 1 (39). – С. 113–120.

36. Казаринов, А. С. Методы и модели экспериментальной педагогики. Часть 1. Математические модели педагогического эксперимента. – Глазов : Глазов. гос. пед. ин-т, 1997. – 118 с.

37. Колмогоров, А. Н. Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. – 1965. – Т. 1, вып. 1. – С. 3–11.

38. Кондратьев, А. С., Ситнова, Е. В. Физическое мышление на современном этапе развития науки // Известия Российского государственного педагогического университета. – 2007. – Т. 8, № 34. – С. 7–20.

39. Крейдлин, Г. Е., Шмелев, А. Д. Математика помогает лингвистике : Кн. для учащихся. – Москва : Просвещение, 1994. – 176 с.

40. Кротов, В. М. К вопросу о сложности (трудности) физических задач // Фізіка: праблемы выкладання. – 1999. – № 3. – С. 69–74.

41. Кудрявцев, В. Б., Вашик, К., Строгалов, А. С. и др. Об автоматном моделировании процесса обучения // Дискретная математика. – 1996. – Т. 8, вып. 4. – С. 3–10.

42. Купчинаус, С. Ю. Дидактические условия развития конструктивно-логического мышления студентов – будущих педагогов-математиков : автореф. дис. … канд. пед. наук. – Ижевск, 2006. – 20 с.

43. Лазарев, А. Н., Чистяков, М. В. Теория и практика решения задач по физике // Педагогический поиск. – 2021. – № 12. – С. 5–11.

44. Ларченкова, Л. А. Образовательный потенциал учебных физических задач в современной школе : дис. … д-ра пед. наук. – Санкт-Петербург, 2014. – 387 с.

45. Леонтьев, Л. П., Гохман, О. Г. Проблемы управления учебным процессом : Математические модели. – Рига, 1984. – 239 с.

46. Лернер, И. Я. Дидактические основы методов обучения. – Москва : Педагогика, 1981. – 186 с.

47. Луков, Вал. А., Луков, Вл. А. Методология тезаурусного подхода: стратегия понимания // Знание. Понимание. Умение. – 2014. – № 1. – С. 18–35.

48. Ляшевская, О. Н., Шаров, С. А. Частотный словарь современного русского языка (на материалах Национального корпуса русского языка). – Москва : Азбуковник, 2009. – 1112 с.

49. Люгер, Д. Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем. – Москва : Вильямс, 2003. – 864 с.

50. Майер, В. В. Элементы учебной физики как основа организации процесса научного познания в современной системе физического образования : дис. ... д-ра пед. наук. – Глазов, 2000. – 409 с.

51. Майер, Р. В. Модель деятельности учащегося при решении задачи // Проблемы школьного и дошкольного образования : материалы III регионального науч.-практ. семинара «Достижения науки и практики – в деятельность образовательных учреждений». – Глазов : ГГПИ, 2012. – С. 108–109.

52. Майер, Р. В. Решение сложных задач с учителем: моделирование на ПЭВМ // Информационные технологии в науке и образовании : материалы международной научно-практической конференции и семинара «Применение MOODLE в сетевом обучении». – Шахты : Изд-во ЮРГУЭС, 2012.

53. Майер, Р. В. Поиск оптимальной последовательности решения учебных задач с учетом их важности и связей между ними: моделирование на ПЭВМ // Психология, социология и педагогика. – 2015. – № 8. – URL: http://psychology.snauka.ru/2015/08/5649 (дата обращения: 11.09.2025).

54. Майер, Р. В. Контент-анализ школьных учебников по естественнонаучным дисциплинам : монография. – Глазов : Глазов. гос. пед. ин-т, 2016. – 1 CD-ROM. – ISBN 978-5-93008-224-1.

55. Майер, Р. В. Исследование математических моделей дидактических систем на компьютере : монография. – Глазов : Глазов. гос. пед. ин-т, 2018. – 160 с. – ISBN 978-5-93008-254-8.

56. Майер, Р. В. Оценка сложности основных положений математики в 5–11-х классах общеобразовательной школы // Вестник Омского государственного педагогического университета. Гуманитарные исследования. – 2018. – № 3 (20). – С 147–150.

57. Майер, Р. В. О применении методов математического и имитационного моделирования для исследования дидактических систем // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Филология, педагогика, психология. – 2019. – № 2. – С. 102–111.

58. Майер, Р. В. Оценка информативности основных положений школьного курса математики // Стандарты и мониторинг в образовании. – 2019. – № 2. – С. 38–45.

59. Майер, Р. В. Оценка сложности объяснения задач, посвященных физическим экспериментам // Проблемы учебного физического эксперимента : сборник научных трудов. Вып. 30. – Глазов : ГГПИ, 2019. – С. 24–26.

60. Майер, Р. В. Оценка сложности объяснения задачи: тезаурусный подход // Вестник Омского государственного педагогического университета. Гуманитарные исследования. – 2019. – № 2 (23). – С. 119–123.

61. Майер, Р. В. Дидактическая сложность учебных текстов и ее оценка: монография. – Глазов : ГГПИ, 2020. 149 с. – 1 CD-ROM. – ISBN 978-5-93008-305-7.

62. Майер, Р. В. Метод оценки сложности логических рассуждений // НИР. Социально-гуманитарные исследования и технологии. – 2020. – № 3 (32). – С. 35–40.

63. Майер, Р. В. Оценка дидактической сложности доказательства теорем школьного курса геометрии // Стандарты и мониторинг в образовании. – 2020. – № 1. – С. 29–35.

64. Майер, Р. В. Компоненты дидактической сложности математической задачи и их оценка // НИР. Социально-гуманитарные исследования и технологии. – 2022. – № 2 (39). – С. 36–41.

65. Майер, Р. В. Компьютерное моделирование решения задачи одним или несколькими учащимися // Вестник Омского государственного педагогического университета. Гуманитарные исследования. – 2022. – № 2 (35). – С. 163–167.

66. Майер, Р. В. Формирование умения решать физические задачи в 7–11 классах: изучение динамики процесса // Стандарты и мониторинг в образовании. – 2022. – № 6. – С 36–43.

67. Майер, Р. В. Об оценке физической, математической и вычислительной сложности задач по физике // НИР. Социально-гуманитарные исследования и технологии. – 2023. – № 1 (42). – С. 54–60.

68. Майер, Р. В. Оценка сложности формул и методов, применяемых при решении школьных задач по механике // Стандарты и мониторинг в образовании. – 2023. – Т. 11, № 6. – С. 39–45.

69. Майер, Р. В. Сложность формул и методов, применяемых при решении школьных задач (на материале электродинамики) // Вестник Омского государственного педагогического университета. – 2023. – № 4 (41). – С 181–186.

70. Майер, Р. В. Учет неопределенности выбора формул при оценке сложности решения физических задач // Педагогический журнал Башкортостана. – 2023. – № 1 (99). – С. 26–38.

71. Майер, Р. В. Физическая, математическая и вычислительная сложности задач по физике // Достижения науки и практики – в деятельность образовательных учреждений : материалы XIV Всерос. науч.-практ. конф. (с междунар. участием), 20 марта – 3 апреля 2023 г. – Глазов : Глазов. гос. инж.-пед. ун-т, 2023. – С. 50–54.

72. Майер, Р. В. Сложность учебных понятий и текстов : монография. – Глазов : ГИПУ, 2024. – 1 CD-ROM. – ISBN 978-5-93008-418-4.

73. Майер, Р. В. Сложность формул и методов решения задач по МКТ, термодинамике, оптике, физике микромира и ЧТО // НИР. Социально-гуманитарные исследования и технологии. – 2024. – № 1 (46). – С. 36–41.

74. Майер, Р. В. Информационно-кибернетическая картина мира и ее формирование у студентов педагогических специальностей : монография. – Глазов : Глазов. гос. пед. ин-т, 2022. – 202 с. – ISBN 978-5-93008-366-8.

75. Манин, Ю. И. Закон Ципфа и вероятностные распределения Левина // Функциональный анализ и его приложения. – 2014. – № 2. – С. 51–66.

76. Машбиц, Е. И. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения. – Москва : Педагогика, 1988 – 192 с.

77. Мирошниченко, А. А. Профессионально ориентированные структуры учебных элементов. – Глазов, 1999. – 62 с.

78. Монахов, С. И. и др. Изучение терминологических подсистем современных школьных учебников на русском языке с помощью модели анализа семантики естественных языков Word2Vec / Монахов С. И., Турчаненко В. В., Федюкова Е. А., Чердаков Д. Н. // Journal of Applied Linguistics and Lexicography. – 2020. – Vol. 2, no. 2. – С. 118–146.

79. Мякишев, Г. Я. и др. Физика. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый уровень / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, Н. Н. Сотский. – Москва : Просвещение, 2016. – 416 с.

80. Мякишев, Г. Я. и др. Физика. 11 класс : учеб для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, В. М. Чаругин. – Москва : Просвещение, 2019. – 445 с.

81. Нагель, О. В., Кокшарова, Н. Ф., Буб, А. С. Соотношение частотности и возраста усвоения русского производного имени и его мотивирующего слова // Язык и культура. – 2016. – № 1 (33). – С. 43–57.

82. Наймушина, О. Э., Стариченко, Б. Е. Многофакторная оценка сложности учебных заданий // Образование и наука. – 2010. – № 2 (70). – С. 58–70.

83. Наумов, И. С., Выхованец, В. С. Оценка трудности и сложности учебных задач на основе синтаксического анализа текстов // Управление большими системами : сборник трудов. – 2014. – Вып. 48. – С. 97–131.

84. Неволин, И. Ф., Позина, М. Б. Тезаурус как показатель компетентности личности // Вестник практической психологии образования. – 2010. – № 2 (23). – С. 69–73.

85. Новиков, А. М. Методология образования. – Москва : Эгвес, 2006. – 488 с.

86. Ополев, П. В. Метафизика сложности и «сложного мышления» // Омский научный вестник. – 2014. – № 1 (125). – С. 96–99.

87. Ополев, П. В. Логический принцип простоты // Вестник Омского ун-та. – 2014. – № 4. – С. 87–90.

88. Орлов, Д., Крайнова, И. Стратегии сложностного мышления. Множественность объекта и «эвристики сборки» // Образовательная политика. – 2021. – № 1 (85). – С. 46–55.

89. Перышкин, А. В. Физика. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений. – Москва : Дрофа, 2013. – 221 с.

90. Перышкин, А. В. Физика. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений. – Москва : Дрофа, 2013. – 237 с.

91. Перышкин, А. В., Гутник, Е. М. Физика. 9 класс: учебник для общеобразоват. учреждений. – Москва : Дрофа, 2014. – 319 с.

92. Ракитина, С. В. Концептосфера и семантическое пространство научного текста // Альманах современной науки и образования. – 2009. – № 8-1. – С. 125–126.

93. Робертс, Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 496 с.

94. Рыжаков, М. В. Образование как сложная открытая нелинейная самоорганизующаяся система // Педагогика. – 2000. – № 1. – С. 48–53.

95. Рыженко, Н. Г. Сложность и трудность структуры решения задачи // Математика и информатика: наука и образование : межвуз. сб. науч. тр. : Ежегод. – 2004. – Вып. 4. – С. 89–92.

96. Рымкевич, А. П. Задачник. 10–11 кл. : пособие для общеобразоват. учреждений. – Москва : Дрофа, 2013. – 192 с.

97. Сакович, А. Л. Сложность физических задач и их уровни // Фізіка. Праблемы выкладання. – 2004. – № 1. – С. 33–40.

98. Самсонов, Н. Б., Чмыхова, Е. В., Давыдов, Д. Г. Разработка и апробация лингвистической методики оценки когнитивной сложности научно-учебного текста // Психологические исследования. – 2015. – № 8(41). – С. 6.

99. Сауров, Ю. А. Физика в 10 классе: модели уроков: кн. для учителя. – Москва : Просвещение, 2005. – 256 с.

100. Сафонова, Н. В. Принцип простоты в естественнонаучном и гуманитарном знании // Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского Философия. Политология. Культурология. – 2016. – Т. 2 (68), № 3. – С. 150–159.

101. Соловов, А. В., Меньшиков, А. А. Дискретные математические модели в исследовании процессов автоматизированного обучения // Educational Technology & Society. – 2001. – № 4. – С. 205–210.

102. Сохор, А. М. Сравнительный анализ учебных текстов (на материале учебников физики) // Проблемы школьного учебника : сб. науч. тр. Вып. 3. – Москва : Просвещение, 1975. – С. 104–117.

103. Столяр, А. А. Логическое введение в математику. – Минск : Вышэйш. школа, 1971. – 224 с.

104. Субетто, А. И. Квалиметрия: малая энциклопедия. Вып. 1. – Санкт-Петербург : ИПЦ СЗИУ – фил. РАНХиГС, 2015. – 244 с.

105. Таршис, Е. Я. Контент-анализ: Принципы методологии (Построение теоретической базы. Онтология, аналитика и феноменология текста. Программы исследования). – Москва : Либроком, 2013. – 176 с.

106. Усольцев, А. П., Шамало, Т. Н. Требования к физическим задачам в контексте формирования функциональной грамотности школьников // Школа будущего. – 2021. – № 2. – С. 316–323.

107. Федоров, Б. И. Формально-логическое представление вопросно-ответных структур научного знания // Логико-философские штудии. – 2010. – № 8. – С. 5–19.

108. Фирстов, В. Е. Математические модели управления дидактическими процессами при обучении математике в средней школе на основе кибернетического подхода : дис. … д-ра пед. наук. – Санкт-Петербург, 2011. – 460 с.

109. Фридман, Л. М. Логико-психологический анализ школьных физических задач. – Москва : Педагогика, 1977. – 208 с.

110. Чернейко, Л. О. Лингвофилософский анализ абстрактного имени : монография. – Москва : Либроком, 2010. – 265 с.

111. Шалак, В. И. Современный контент-анализ. Приложения в области: политологии, психологии, социологии, культурологии, экономики, рекламы. – Москва : Омега-Л, 2004. – 272 с.

112. Шкалы измерений. Термины и определения. – Москва : Стандартинформ, 2008. – 20 с.

113. Шеннон, Р. Имитационное моделирование систем: искусство и наука. – Москва : Мир, 1978. – 302 с.

114. Яцко, В. А. Эффективность применения косинусной метрики для определения смысловой близости документов // Грани познания. – 2020. – № 4 (69). – С. 3–6.

115. Ядровская, М. В. Модели в педагогике // Вестник Томского государственного университета. – 2013. – № 366. – С. 139–143.

116. Bush, R. R., Mosteller, F. Stochastic Models for Learning. – Martino Publishing, 2012. – 382 p.

117. Checkland, P., Scholes, J. Soft System Methodology in Action. – John Wiley & Sons Ltd, 1990. – 346 p.

118. Davis, B., Sumara, D. Complexity and Education: Inquiries Into Learning, Teaching, and Research. – Mahwah, New Jersey, London, 2006. – 201 p.

119. Hanakova, M. The complexity of physics and mathematics in analysis for (more) suitable assessment in physics olympiad // EDULEARN18 Proceedings. – 2018. – P. 7685–7692.

120. Manning, C. D., Raghavan, P., Schutze, H. An Introduction to Information Retrieval. – Cambridge University Press, 2008.

121. Mayer, R. V. Computer-Assisted Simulation Methods of Learning Process // European Journal of Contemporary Education. – 2015. – Vol. 13, Is. 3. – P. 198–212. – DOI: 10.13187/ejced.2015.13.198.

122. Mayer, R. V. Methods of the informativeness and didactic comlexity estimation of educational concepts, pictures and texts // European Journal of Education Studies. – 2016. – Vol. 2, Is. 9. – DOI 10.5281/zenodo.168090.

123. Mayer, R. The complexity assessment of conceptions and educational texts on natural scientific disciplines // ICERI2016 Proceedings. 9th International Conference of Education, Research and Innovation. – Seville (Spain), 2016. – P. 6078–6088.

124. Mayer, R. V. On complexity measurement of some issues of the school mathematics course // Proceedings of ICERI2018, Seville, Spain. – P. 9764–9771.

125. Mayer, R. V. The semantic complexity estimation of the learning task explanation // Proceedings of ICERI2019, Seville, Spain. – P. 337–345.

126. Mayer, R. V. The cognitive complexity estimation of the basic statements of the school math course // Proceedings of ICERI2020 Conference 9th-10th November 2020. – P. 162–169.

127. Mayer, R. V. The semantic complexity of formulas and methods for solving tasks in mechanics: evaluation results // GESJ: Education Science and Psychology. – 2024. – No. 3 (72). –P. 13–19.

128. McNamara, D. S., Graesser, A. C., McCarthy, P. & Cai, Z. Automated Evaluation of Text and Discourse with Coh-Metrix. – Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

129. Morrison, C. M., Ellis, A. W., Quinlan, P. T. Age of acquisition, not word frequency affects object naming, not object recognition // Memory & Cognition. – 1992. – № 20 (6). – P. 705–714.

130. Solovyev, V. at all Text Complexity and Abstractness: Tools for the Russian Language / V. Solovyev, M. Solnyshkina, M. Andreeva, A. Danilov, R. Zamaletdinov // International Conference “Internet and Modern Society” (IMS-2020). CEUR Proceedings. – P. 75–87.

131. Torgerson, W. S. Scaling. Theory and Method of Scaling // The British Journal of Sociology. – 1961. – Vol. 12, No. 1 (Mar., 1961). – P. 88–89.

132. White, M. D., Marsh, E. E. Content analysis: A flexible methodology // Library trends. – 2006. – Vol. 55, № 1. – P. 22–45.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Введение

1. Учебная задача и ее сложность

2. Метод оценки сложности задачи

3. Компьютерные модели решения задач

4. Развитие умения решать физические задачи в 7–11 классах: динамика процесса

5. Зависимость количества усвоенных понятий от их сложности

6. Сложность логических рассуждений

7. Сложность математических рассуждений в учебных текстах

8. Дидактическая сложность математической задачи

9. Оценка сложности доказательства теорем

10. Оценка сложности физических задач

11. Исследование системы формульных знаний по физике

12. Сложность формул школьного курса физики

13. Сложность выбора формул при решении физических задач

Заключение

Приложение

Список литературы