ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Майер Р.В., д.п.н., доцент
ФГБОУ ВПО “Глазовский государственный педагогический институт ”
г. Глазов

Аннотация. В статье анализируется проблема изучения метода статистических испытаний на занятиях по компьютерному моделированию в педагогическом вузе. Предлагаемая методика предусматривает имитационное моделирование различных стохастических процессов. Среди них передача информации по каналу связи, колебания маятника в потоке воздуха, отклонения альфа–частиц атомами золота, образование перколяционного кластера и т.д.

A STUDY OF MONTE-CARLO METHOD IN A TEACHERS' TRAINING INSTITUTE

Mayer R.V.

Annotation. The problem of Monte-Carlo method study at computer simulation lessons in a Teachers' Training Institute is reviewed in the article. The suggested technique envisages the simulation modelling of various stochastic processes. They include transmission of information via a communication link, oscillation of a pendulum in an air stream, deflection of alpha particles by Au atoms, formation of a percolating cluster, etc.

Для изучения систем, функционирование которых не определяется полностью их параметрами, начальным состоянием и внешними воздействиями, а зависит от каких–то случайных факторов, используется метод статистического моделирования (или метод статистических испытаний). Он состоит в многократном проведении испытаний с последующей статистической обработкой получающихся результатов. Этот подход позволяет исследовать целый класс стохастических процессов, среди которых: передача сообщений по каналу связи, обучение вероятностного автомата, поведение дискретно–детерминированных систем, на вход которых поступают случайные сигналы, функционирование систем массового обслуживания и т.д. Метод статистических испытаний — один из важнейших методов исследования стохастических систем, поэтому его следует изучать в курсе компьютерного моделирования в педагогическом вузе. В 4 и 5 главах электронного учебника “Компьютерное моделирование” [4, 5] предложена методика такого изучения, предусматривающая построение дискретных и непрывных компьютерных моделей, изучение различных систем массового обслуживания, вероятностных автоматов, вероятностных клеточных автоматов и т.д. Рассмотрим несколько задач, анализ которых позволяет понять сущность метода статистических испытаний [1–6].

<u>Задача 1.</u> Промоделируйте одномерные случайные блуждания молекулы газа, используя фибоначчиевый генератор случайных чисел. Полу-

чите распределение конечной координаты z_N блуждающей точки при различном количестве совершенных шагов N. Убедитесь в том, что квадрат смещения случайной величины z_N прямо пропорионален N. Решение этой задачи можно найти в электронной книге [3].

Задача 2. **Нитяной маятник, состоящий из подвешенного на нити тела, находится в горизонтальном потоке воздуха. Скорость движения воздуха в потоке изменяется случайным образом, а направление остается неизменным. Необходимо изучить движения маятника, получить кривую распределения его угловой координаты φ, найти ее среднее значение и среднеквадратическое отклонение (СКО).** Решение этой задачи рассмотрено в [5]. На рис. 1.1 изображен график зависимости угла отклонения маятника φ от времени, а на рис. 1.2 — распределение значений угла φ.

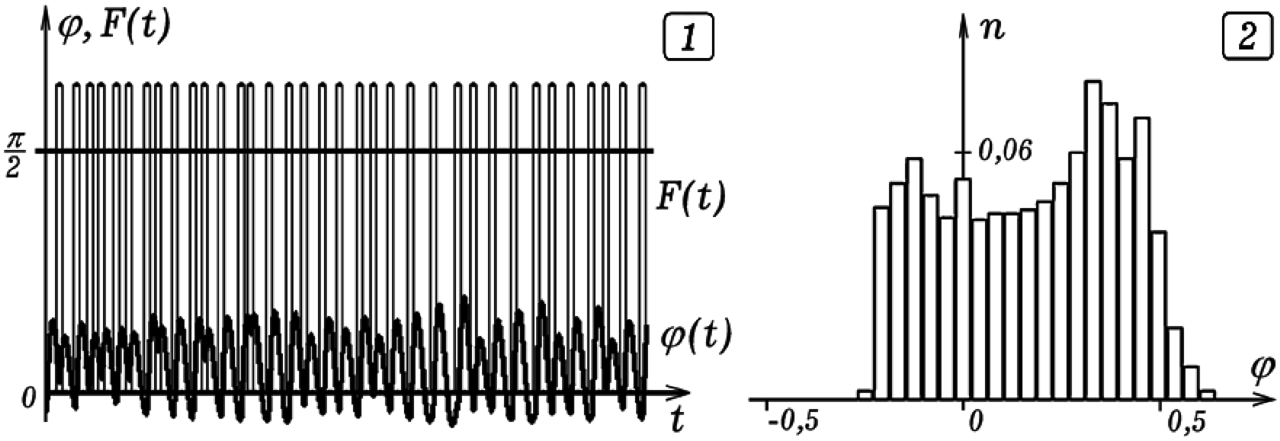

Рис. 1. Изучение случайных колебаний маятника в потоке воздуха.

Задача 3. **Создайте имитационную модель опыта Резерфорда по рассеянию альфа–частиц атомами золота. Рассчитайте траекторию движения частицы в поле отталкивания двух атомов. Методом статистических испытаний изучите зависимость числа альфа–частиц от угла отклонения при случайных значениях прицельного параметра.** Решение представлено в [5]. На рис. 2 показаны силы, действующие на альфа–частицу и распределение их угла отклонения α, полученное методами статистического моделирования.

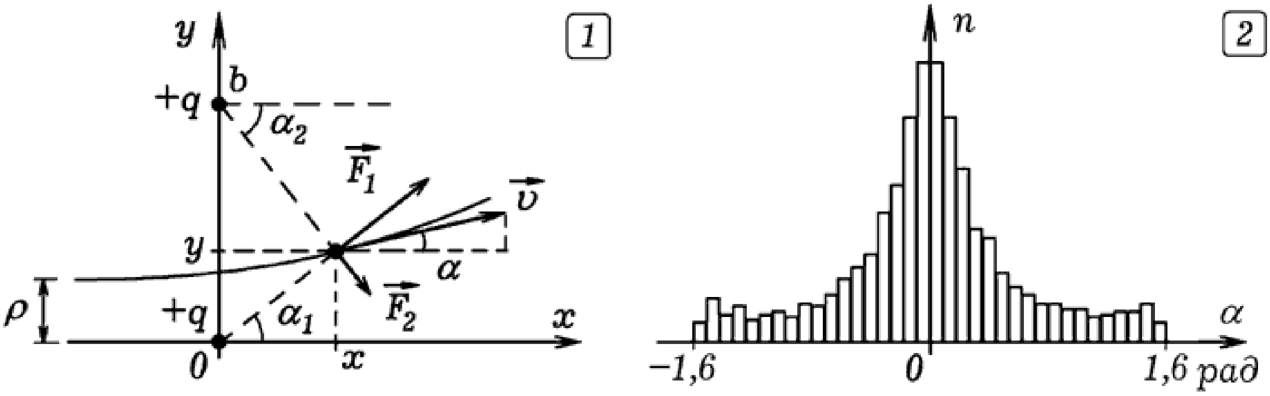

Рис. 2. Отклонение альфа–частиц в поле атома золота.

<u>Задача 4.</u> Имеется металлическая сетка $M \times M$, расположенная между двумя электродами, из которой случайным образом с заданной вероятностью q удалены некоторые узлы или ячейки (а с вероятностью $p = 1 - q$ заняты). При больших q будет вырезано слишком много узлов, и исчезнет путь, соединяющий нижний электрод с верхним, — сетка перестанет проводить ток. Если вырезано мало узлов, то будет существовать один или несколько перколяционных кластеров, пронизывающих данную структуру насквозь и соединяющих электроды. Необходимо изучить зависимость вероятности P образования перколяционного кластера от p. Решение задачи приведено в [3, 4]. На рис. 5.1 ячейки, входящие в один кластер, закрашены одним цветом. Хорошо виден перколяционный кластер, пронизывающий всю структуру и соединяющий верхний и нижний электроды. Для изучения зависимости вероятности P образования перколяционного кластера от вероятности p наличия узла используется метод статистических испытаний. Сначала, исходя из заданной вероятности p наличия занятой ячейки, случайным образом формируется ячеистая структура (рис. 5.1), после чего определяется, содержит она перколяционный кластер или нет. Эта процедура многократно повторяется, что позволяет определить вероятность перколяции P при данном значении p. Затем проводится аналогичный вычислительный эксперимент при других p и строится график зависимости $P(p)$ (рис. 5.2).

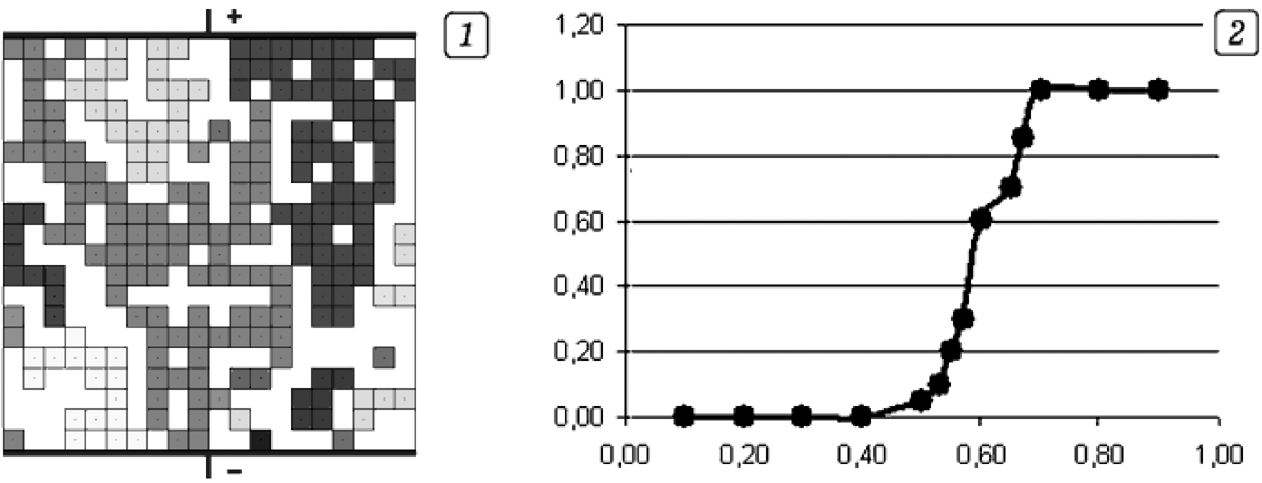

Рис. 3. Возникновение перколяционного кластера.

<u>Задача 5.</u> Технологический процесс состоит из 5 операции. Длительность и вероятность правильного выполнения каждой операции задаются матрицами: $\tau_i = \{1{,}6;\ 2{,}7;\ 1{,}4;\ 3{,}8;\ 2{,}6\}$ и $p_i = \{0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}4;\ 0{,}8;\ 0{,}6\}$. Если операция выполнена неверно, то она повторяется снова. Необходимо вычислить среднее время выполнения технологического процесса и дисперсию этой величины. Решение этой задачи приведено в [4].

<u>Задача 6.</u> Источник вырабатывает сообщение 10110010…1: Кодер разбивает его на блоки длиной $D-1$ и добавляет 1 бит четности так, что получаются кадры длиной D. Они поступают в канал связи, в котором с

вероятностью p вносятся ошибки (инвертируются биты), и, пройдя через него, попадают в декодер. На передачу 1 бита затрачивается 1 такт (допустим, 1 мс). Реализуется система с переспросом: декодер выявляет кадры с ошибками и по каналу переспроса посылает сигнал о повторе передачи соответствующего кадра. На его повторную передачу снова затрачивается N тактов. Сигнал по каналу переспроса не вносит задержки. Промоделируйте этот процесс на ПЭВМ, определите скорость передачи. Решение задачи приведено в [4]. В программе организован цикл, в котором моделируется покадровая передача информации. При каждой итерации время t увеличивается на D. В кадре длиной D происходит ошибка с вероятностью pD. Генерируется случайное число x и если оно меньше pD, то происходит ошибка и по каналу связи повторно передается тот же кадр (для этого i уменьшается на 1). При безошибочной передаче кадра на экран просто выводится время t. Скорость передачи определяется так: $\upsilon = N_K(D-1)/t$, где $(D-1)$ — число информационных бит, N_K — число кадров, t — число тактов. Она зависит от длины кадров и вероятности ошибки p. Используемая программа представлена ниже.

```
uses crt, dos;
const Chislo_k=500; Dlina_k=8; p=0.05;
var I,t: longint; x, skorost :real;
BEGIN
   For i:=1 to Chislo_k do begin t:=t+Dlina_k;
     x:=random(1000)/1000; writeln('KADR ',i, x);
     If x<p*Dlina_k then begin
     Writeln('OSHIBKA V KADRE ',i,' ',t); i:=i-1; end;
     If x>=p*Dlina_k then writeln(t);
   end;
skorost:=Chislo_k*(Dlina_k-1)/t;
Writeln(t,' ',skorost); Readkey;
End.
```

В случае, когда длина кадра $D = 8$, и сообщение передается без помех ($p = 0$), скорость передачи полезной информации получается равной $\upsilon = 0{,}875$ бит/с. В самом деле, к семи информационным битам прибавляется восьмой проверочный, поэтому скорость передачи можно рассчитать так: $\upsilon = 7/8 = 0{,}875$ бит/с. Проведя серию вычислительных экспериментов можно убедиться, в том что при увеличении вероятности p ошибки скорость υ передачи информации уменьшается: 1) при $p_1 = 0{,}001$, $\upsilon_1 = 0{,}867$ бит/с; 2) при $p_2 = 0{,}01$, $\upsilon_2 = 0{,}800$ бит/с; 3) при $p_3 = 0{,}02$, $\upsilon_3 = 0{,}724$ бит/с; 4) при $p_4 = 0{,}05$, $\upsilon_4 = 0{,}522$ бит/с.

Задача 7. Постройте график зависимости скорости передачи информации от длины кадра, если вероятность ошибки постоянна и равна 0,02; 0,1; 0,3. Используется та же программа. Если $p = 0{,}1$, то при длине кадра 2 или 3 бита скорость передачи невелика за счет большого числа проверочных битов четности. С ростом длины кадра она уменьшается из–за увеличения вероятности ошибки в кадре и затрат времени на повторную его передачу. Существует оптимальная длина кадра, при которой скорость максимальна. Результаты моделирования для $p = 0{,}05$ и $0{,}02$ — кривые 1 и 2 на рис. 4.1.

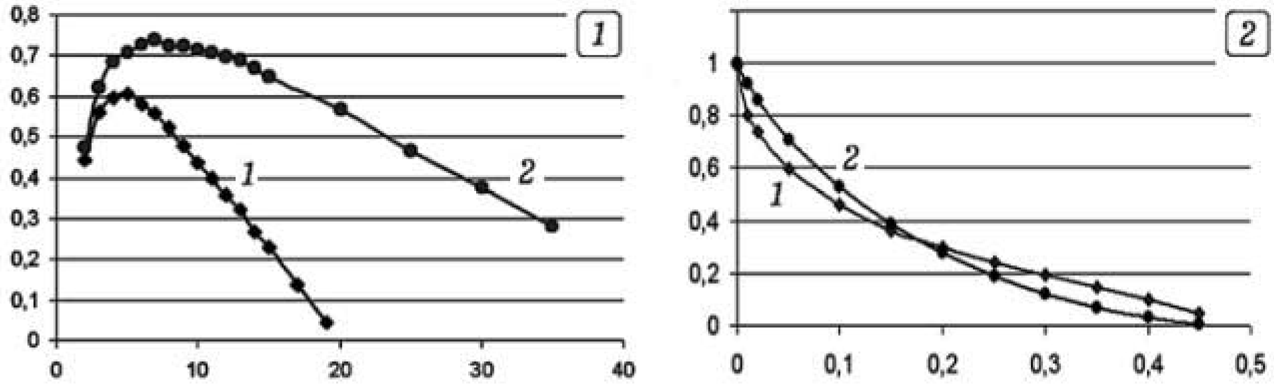

Рис. 4. Результаты моделирования передачи информации по каналу связи.

<u>Задача 8.</u> Считая, что емкость канала связи С равна максимальной скорости передачи информации, изучите зависимость емкости канала от вероятности ошибки, постройте график. Сравните полученные результаты с расчетными значениями для двоичного симметричного канала с шумом. Емкость (пропускная способность) двоичного симметричного канала связи с вероятностями ошибки p и правильной передачи $(1-p)$ равна $C = C_0(1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p))$. Для нахождения емкости C моделируемого канала связи с переспросом зададим вероятность ошибки 0,05 и найдем скорости передачи при различных длинах кадра. Обнаружим, что при $N = 5$ скорость передачи максимальна и равна 0,60, — эту величину и следует приближенно считать емкостью канала связи C. Повторим эту процедуру при других p, каждый раз определяя максимальную скорость передачи. Построим график 1 зависимости емкости моделируемого канала связи от вероятности ошибки (рис. 4.2). Видно, что при увеличении р от 0 до 0,5 она уменьшается от 1 до 0. Эта кривая 1 похожа на расчетную кривую 2 для двоичного симметричного канала связи, но точного совпадения нет [3].

<u>Задача 9.</u> На вход канала связи поступает последовательность символов из трехбуквенного алфавита $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, вероятности использования которых определяются матрицей $p_i = (0{,}3;\ \ 0{,}25;\ \ 0{,}45)$. На выходе канала связи получается поток символов из алфавита $A' = \{a_1, a_2, a_3, b\}$, где b — ошибочный символ. Статистические свойства канала связи задаются стохастической матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо промоделировать передачу информации по каналу связи и методом статистических испытаний определить вероятность ошибки. Элементами матрицы являются вероятности $p_{i,j}$ появления на выходе канала связи j–ой буквы из алфавита A', когда на вход канала связи поступает i–ая буквы из алфавита A ($i = 1,2,3$; $j = 1,2,3,4$). Используемая программа [4] содержит цикл, в котором методом выбора по жребию определяется входной символ, а затем с помощью матрицы вероятностей P разыгрывается выходной символ. При этом осуществляется подсчет относительного числа ошибок $n_{ош} / n$, и результат выводится на экран. Экспериментируя с программой, можно установить, что после 2000 – 3000 испытаний результаты вычисления $n_{ош} / n$ приобретают статистическую устойчивость.

Предлагаемая методика преподавания метода статистических испытаний, отдельные элементы которой представлены в работах [3, 4, 5], позволяет сформировать понимание сущности этого метода, способствует повышению интереса студентов к компьютерному моделированию.

Библиографический список

1. Булавин Л.А., Выгорницкий Н.В., Лебовка Н.И. Компьютерное моделирование физических систем. — Долгопрудный: Издательский Дом “Интеллект”, 2011. – 352 с.
2. Гулд, Х. Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2 ч. / Х. Гулд, Я. Тобочник. — М.: Мир, 1990. — Ч. 2. — 400 с.
3. Майер Р.В. Задачи, алгоритмы, программы [Электронный ресурс] — http://komp-model.narod.ru (Время обращения 05.12.2012).
4. Майер Р.В. Компьютерное моделирование: 5. Дискретно–стохастические модели [Электронный ресурс] — http://komp-model.narod.ru/Komp-model5.pdf (Время обращения 05.12.2012).
5. Майер Р.В. Компьютерное моделирование: 6. Непрерывно–стохастические модели [Электронный ресурс] — http://komp-model.narod.ru/Komp-model6.pdf (Время обращения 05.12.2012).
6. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов. –– М.: Высш. Шк., 2001. — 343 с.