

УДК 37.02: 004.94

## ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБУЧЕНИЯ И ЕЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Майер Р.В.***ФБГОУ ВПО «Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко», Глазов, e-mail: robert\_maier@mail.ru*

Сформулирована основная задача математической теории обучения: зная параметры учащихся, характеристики используемых методов и распределение учебной информации, необходимо определить уровень знаний учеников в процессе обучения и после его окончания. Рассмотрено ее решение с помощью двух-компонентной модели обучения. Предполагается, что уровень изученности каждого элемента учебного материала складывается из двух составляющих: 1) знаний первой категории (или непрочных знаний), которые быстро забываются; 2) знаний второй категории (прочных знаний или навыков), которые забываются существенно медленнее. Также учитывается, что при увеличении числа обращений ученика к данному элементу учебного материала: 1) время его использования уменьшается, стремясь к некоторому пределу; 2) коэффициент научения растет. Рассмотрена компьютерная модель, представлена программа на языке Pascal, проведен анализ результатов моделирования.

**Ключевые слова:** дидактика, математическая теория обучения, компьютерное моделирование

## MAIN PROBLEM OF THE MATHEMATICAL THEORY OF TRAINING AND ITS DECISION WITH USING METHOD OF IMITATING MODELLING

**Mayer R.V.***FSBEI HPE «The Glazov Korolenko State Pedagogical Institute», Glazov, e-mail: robert\_maier@mail.ru*

The main task of the mathematical theory of learning is formulated: knowing parameters of pupils, characteristics of used methods and distribution of educational information, it is necessary to define level of knowledge of pupils in the course of learning and after its termination. Its decision by means of two-component model of training is considered. It is supposed that level of study of each element of a training material consists of two components: 1) knowledge of the first category (or weak knowledge) which are quickly forgotten; 2) knowledge of the second category (strong knowledge or skills) which are forgotten significantly more slowly. Also it is considered that at increase in number of addresses of the pupil to this element of a training material: 1) time of its use decreases, aspiring to some limit; 2) the coefficient of learning grows. The computer model is considered, the program in the Pascal language is submitted, results of modeling are analyzed.

**Keywords:** didactics, the mathematical theory of training, computer modeling

Повышение эффективности процесса обучения требует не только совершенствования содержания и методики изучения отдельных предметов, но и разработки теоретических основ дидактики с привлечением как гуманитарных (психология), так и точных наук (математика, кибернетика). В настоящее время получил распространение так называемый информационно-кибернетический подход к анализу учебного процесса, основанный на рассмотрении системы «учитель–ученик» с точки зрения теории управления [1, 2], предполагающий построение математической теории обучения (МТО) и создание компьютерной модели обучения [3, 4].

### Основная задача математической теории обучения

Рассмотрим группу из  $n$  учеников, каждый из которых характеризуется набором параметров  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и  $m$  учителей, владеющих методами  $M_1, M_2, M_3$  и т.д. Учителя должны обеспечить усвоения совокупности элементов учебного материала (ЭУМ)  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ . Основная задача математической теории обучения: зная параметры учащихся, характеристики

используемых методов и учебную программу (распределение учебной информации), необходимо определить уровень знаний (сформированности навыка) у учащихся в процессе обучения и после его окончания.

Развитие МТО предполагает создание различных математических моделей ученика и учителя и их использование для решения частных задач, сводящихся к анализу конкретных ситуаций, возникающих при обучении. К основным методам МТО относятся метод математического моделирования и метод компьютерного (имитационного) моделирования. Особенность МТО состоит в точном и полном указании всех условий и факторов, влияющих на анализируемую ситуацию, возникающую в процессе обучения. При этом должна быть определены: 1) используемая математическая модель (система уравнений); 2) параметры ученика (коэффициенты научения, забывания и т.д.); 3) порядок поступления учебного материала, последовательность ЭУМ; 4) сложность изучаемых ЭУМ, и ее зависимость от уровня усвоения ранее изученных ЭУМ.

Как следует из [3 – 5], компьютерные модели процесса обучения дополняют ка-

чественные рассуждения, делают их более объективными, обоснованными и могут быть использованы тогда, когда проведение педагогического эксперимента требует больших затрат, неправомерно или приводит к отрицательным результатам. Изменяя последовательность изучения различных ЭУМ, длительность занятий и параметры ученика, можно с помощью компьютерной модели исследовать влияние тех или иных факторов на результат, найти оптимальный путь обучения в конкретном случае.

### Двухкомпонентная модель обучения

При компьютерном моделировании обучения часто исходят из того, что все элементы учебного материала (ЭУМ) забываются с одинаковой скоростью [1, 2, 5], что не совсем верно. Психологи установили, что те ЭУМ, которые включены в деятельность ученика, запоминаются более прочно и забываются существенно медленнее, чем ЭУМ, которые были один раз изучены и не используются. Предположим, что учет зависимости скорости забывания от частоты использования изучаемых ЭУМ учеником в своей деятельности позволит создать компьютерную модель обучения, которая в большей степени соответствует реальной ситуации. Она должна основываться на многокомпонентной модели знаний, согласно которой знания ученика состоят из нескольких компонентов, отличающихся прочностью усвоения и забываемых с различными скоростями [3, 4]. В простейшем случае получается двухкомпонентная модель: вся усвоенная учебная информация условно разделяется на две категории: 1) непрочные знания, которые быстро забываются; 2) прочные знания (навыки), сформированные в результате многократного обращения ученика к данному ЭУМ и забываемые медленно.

Итак, предлагается двухкомпонентная модель ученика, изучающего совокупность из  $n$  ЭУМ. При этом, в отличие от известных моделей, считается, что уровень  $Zn_i$  изученности  $i$ -го ЭУМ складывается из двух составляющих: 1) знаний первой категории  $z_i$  (или непрочных знаний), которые быстро забываются; 2) знаний второй категории  $n_i$  (прочных знаний или навыков), которые забываются существенно медленнее. Получается:  $Zn_i = z_i + n_i$ . В основе анализируемой модели лежит еще одно предположение: при каждом обращении ученика к  $i$ -му ЭУМ, которое длится время  $\Delta t$ , уровень знаний  $Zn_i$  возрастает до 1; знания всех остальных ЭУМ при этом убывают по экспоненциальному закону вследствие забывания.

Пусть обучение происходит в течение 6 уроков длительностью  $T_{ур} = 300$  УЭВ (условных единиц времени), которые разделены переменными длительностью  $T_{ур} = 700$  УЭВ. Изучаемый материал состоит из ЭУМ, образующих упорядоченную последовательность  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{500}$  ( $e_j, j=1, 2, \dots, 500$ ). Степень изученности курса определяется количеством  $j$  ранее изученных ЭУМ. При этом изучаемый учебный материал содержит как плановые (или новые), так и уже изученные ранее ЭУМ. Например, изучая иностранные слова, ученик переводит текст, в котором содержатся новые для него слова и слова, уже изученные ранее. Будем считать, что после изучения очередного планового  $j$ -го ЭУМ, с вероятностью  $p_1 = 0,20$  встречается следующий (новый)  $(j+1)$ -й ЭУМ, а с вероятностью  $p_2 = 0,80$ , – ранее изученный вопрос, случайно выбранный из последних ста изученных ЭУМ ( $e_{j-100}, \dots, e_j$ ). Если изучено меньше 100 ЭУМ ( $j < 100$ ), то старый ЭУМ выбирается из совокупности  $e_0, \dots, e_j$ . При этом все ЭУМ разделены на 3 равные по количеству группы, чередуются друг с другом и после первого (очередного, планового) изучения случайно встречаются ученику с вероятностями 0,1, 0,5 или 0,9.

Состояние ученика в каждый момент времени  $t$  задается двумя одномерными матрицами  $z_i$  и  $n_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), элементы которых лежат в интервале от 0 до 1. Если  $i$ -й ЭУМ совсем не изучен, то  $Zn_i = z_i + n_i = 0$ ; если изучен хорошо, то  $Zn_i = z_i + n_i = 1$ . В результате работы с  $i$ -м ЭУМ его уровень изученности возрастает до  $Zn_i := 1$ ,  $z_i$  и  $n_i$  увеличиваются по закону:  $dn_i / dt = \alpha_i(1 - n_i)$ ,  $z_i = 1 - n_i$ . Получаем формулы:  $n_i^{t+1} = n_i^t + \alpha_i(1 - n_i^t)\Delta t$ ,  $z_i^{t+1} = 1 - n_i^{t+1}$ . Сразу после окончания работы ученика с  $i$ -м ЭУМ он начинает забывать его; при этом  $z_i$  и  $n_i$  уменьшаются по экспоненциальному закону:  $dz_i / dt = -\gamma_z z_i$ ,  $dn_i / dt = -\gamma_n n_i$ , где  $\gamma_z$  и  $\gamma_n$  – коэффициенты забывания «непрочных» и «прочных» знаний. В конечных разностях получаем:

$$z_i^{t+1} = z_i^t - \gamma_z z_i^t \Delta t, \quad n_i^{t+1} = n_i^t - \gamma_n n_i^t \Delta t.$$

В простейшем случае коэффициент научения, характеризующий скорость увеличения знаний ученика, – постоянная величина. Будем исходить из того, что коэффициент научения  $\alpha_i$ , соответствующий  $i$ -му ЭУМ, тем больше, чем больше: 1) суммарные знания ученика  $S_{zn}$  всего учебного материала; 2) уровень изученности данного ЭУМ  $Zn_i := z_i + n_i$ . Этим требованиям удовлетворяет функция:

$$\alpha_i = a_1(a_2 + z_i + n_i - \exp(-S_{zn} / a_3)).$$

Можно учесть, что при работе с  $i$ -м ЭУМ (например, чтение или перевод слова, решения простой задачи) ученик затрачивает время  $\Delta t_i$ , которое по мере увеличения уровня изученности этого ЭУМ  $Zn_i := z_i + n_i$  уменьшается, стремясь к некоторому пределу. Допустим, что  $\Delta t_i = b_1 / (z_i + n_i + b_2)$  (УЕВ). Суммарное количество всех знаний  $S_{zn}$  и уровень  $S_n$  знаний второй категории (навыки) рассчитываются по формуле:

$$S_{zn} = \sum_{i=1}^N (z_i + n_i), \quad S_n = \sum_{i=1}^N n_i.$$

Параметры имитационной модели подбирают так, чтобы получающиеся результаты соответствовали практике обучения. В нашем случае:  $a_1 = 0,14$ ,  $a_2 = 1,3$ ,  $a_3 = 100$ ,  $b_1 = 0,1$ ,  $b_2 = 0,02$ .

#### Компьютерная модель и результаты моделирования

Для моделирования поведения рассмотренной выше системы, используется компьютерная программа ПР-1. Она содержит цикл по времени, в котором осуществляется выбор «изучаемого» ЭУМ, вычисление коэффициента усвоения ученика  $\alpha_j$ , времени работы  $\Delta t_i$  с этим ЭУМ, уровней усвоения  $j$ -го ЭУМ ( $z_j$  и  $n_j$ ), а также уровней знаний всех остальных ЭУМ, которые в данный момент не рассматриваются. Кроме того, он включает в себя условный оператор, определяющий, происходит в данный момент обучение или нет, и операторы, отвечающие за вывод результатов моделирования на экран.

Было осуществлено компьютерное моделирование обучения ученика в следую-

щих двух ситуациях: 1. Обучение осуществляется в течение 6 уроков, разделенных перерывами, причем ученик после  $j$ -го ЭУМ изучает либо очередной  $(j+1)$ -й ЭУМ, либо с вероятностью  $p_2 = 0,80$ , – ранее изученный вопрос, случайно выбранный из последних ста ранее изученных ЭУМ. 2. Обучение осуществляется в течение 9 уроков, разделенных перерывами, причем ученик после  $j$ -го ЭУМ изучает либо очередной  $(j+1)$ -й ЭУМ, либо с вероятностью  $p_2 = 0,80$ , – ранее изученный вопрос, случайно выбранный из всех ранее изученных ЭУМ.

На рис. 1 представлены получающиеся графики зависимостей суммарного уровня знаний  $S_{zn}$  и уровня прочных знаний (навыков)  $S_n$ , а также уровень знаний одного из ЭУМ ( $i=150$ ) в ситуации 1. Также с помощью точек показаны номера вопросов, которые изучает ученик (случайные вопросы из последних ста). Видно, что во время занятия суммарный уровень знаний  $S_{zn}$  ученика и уровень сформированности навыка  $S_n$  увеличиваются; во время перерывов и после обучения происходит их снижение вследствие забывания. При этом «непрочные» знания быстро забываются, остаются только «прочные». Из верхнего графика видно, как в моменты  $t'_1$ ,  $t'_2$ ,  $t'_3$ , когда ученик обращается к 150-му ЭУМ, происходит быстрое увеличение уровня  $Zn_{150}$  знаний до 1, которое сменяется экспоненциальным убыванием. В эти же моменты резко увеличивается уровень сформированности навыка  $T_{150}$ , который затем очень медленно снижается. Результаты моделирования обучения в ситуации 2 представлены на рис. 2.

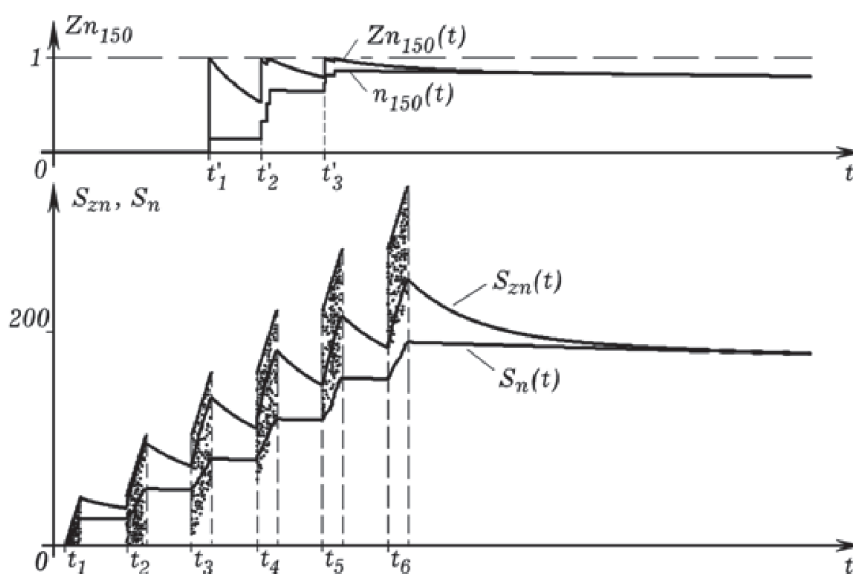


Рис. 1. Результаты моделирования обучения (ситуация 1)



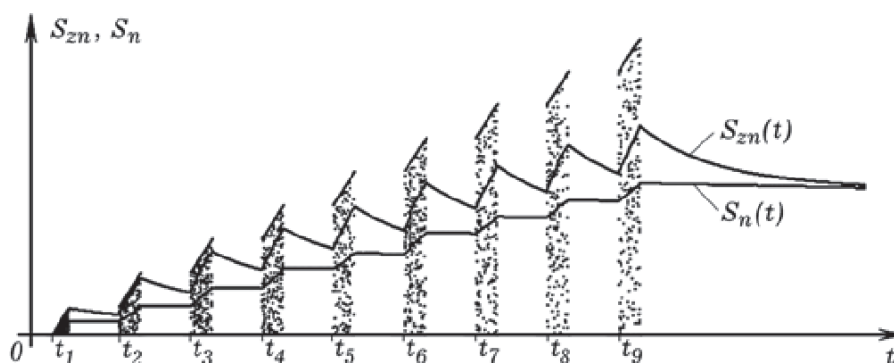


Рис. 2. Результаты моделирования обучения (ситуация 2)

### Закключение

Предложенная компьютерная модель обучения, учитывает, что при увеличении числа обращений ученика к данному ЭУМ происходит увеличение доли прочных знаний, которые забываются существенно медленнее; время использования этого ЭУМ уменьшается, стремясь к некоторому пределу. При этом коэффициент научения по мере увеличения суммарного количества знаний и/или знаний данного ЭУМ растет. Эта модель не имеет аналогов в известной автору литературе.

Одно из направлений использования имитационного моделирования процесса обучения связано с созданием обучающей программы, моделирующей учебный процесс в школе, которая предназначена для

тренировки студентов педагогических вузов. Она должна допускать изменение параметров учеников, длительность занятий, распределения учебного материала и стратегии поведения учителя. В процессе ее работы студент, играющий роль учителя, изменяет скорость подачи учебной информации, быстро реагирует на вопросы учеников, проводит контрольные работы, ставит оценки, пытаясь добиться наибольшего уровня знаний за заданное время. После окончания «обучения» на экран выводятся графики, показывающие изменение «количества знаний учеников класса», оценки за «выполненные контрольные работы» и т.д. Кроме того, обучающая программа может проанализировать работу «учителя» (студента) и поставить ему оценку.

### Программа ПР-1

```
{ $N+ } uses crt, graph; { Free Pascal }
const M=2000; gz=0.001; gn=1E-5;
Mz=1.2; Mt=0.07;
var z,n,p: array[-1..M] of single;
Gd,Gm,i,j,k,r,s: integer;
t,dt,a,SZ,SN: single; Label mm;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,
'c:\bp\bgi'); line(0,500,800,500);
Randomize; p[1]:=0.1;
For i:=2 to M do begin p[i]:=p[i-1]+
0.40; If p[i]>1 then p[i]:=0.1; end;
Repeat k:=0; If (round(t/100) mod
10<3) and ((t<5300)) then begin k:=1;
If random(100)>80 then s:=j else
begin mm: If j<100 then s:=round(j*
random(100)/100-1); If j>=100 then
s:=j-round(100*random(100)/100-1);
If random(100)/100>p[s] then goto
mm; end; a:=0.14*(1.3+z[s]+n[s]-exp
```

```
(-Sz/100)); dt:=abs(0.1/(z[s]+n[s]+
0.02)); n[s]:=n[s]+a*(1-n[s]); If
n[s]>1 then n[s]:=1; z[s]:=1-n[s];
If s=j then inc(j); end else
dt:=0.5; t:=t+dt;
For i:=1 to M do If i<>s then begin
z[i]:=(1-gz*dt)*z[i]; n[i]:=(1-gn*
dt)*n[i]; end; SZ:=0; For i:=1 to M
do SZ:=SZ+z[i]+n[i]; SN:=0; For i:=1
to M do SN:=SN+n[i]; If k=1 then ci
rcle(round(Mt*t),500-round(s*Mz),1);
circle(round(Mt*t),500-round(Mz*SZ),
1); circle(round(Mt*t),150-round(10
0*(z[150]+n[150])),1); circle(round
(Mt*t),150-round(100*(n[150])),1);
circle(round(Mt*t),500-round(Mz*SN),
1); until (KeyPressed) or (j>500) or
(t>16000); CloseGraph; END.
```

### Список литературы

1. Добрынина Н.Ф. Математические модели распространения знаний и управления процессом обучения студентов // Фундаментальные исследования. 2009. № 7. С. 7-9.
2. Леонтьев Л.П., Гохман О.Г. Проблемы управления учебным процессом: Математические модели. – Рига, 1984. – 239 с.
3. Майер Р.В. Компьютерная модель обучения с изменяющимся коэффициентом забывания – International Journal

of Open Information Technologies – Vol 2, № 1 (2014). – pp. 12–16. (<http://injoit.org/index.php/j1>).

4. Майер Р.В. Кибернетическая педагогика: Имитационное моделирование процесса обучения. – Глазов, ГГПИ, 2014. – 140 с. (<http://maier-rv.glazov.net>).

5. Фирстов В.Е. Математические модели управления дидактическими процессами при обучении математике в средней школе на основе кибернетического подхода: Дисс. ... д-ра пед. наук. – С.-Петербург, 2011. – 460 с.